Introduction à l'analyse

DEVOIR SURVEILLÉ 1

Vendredi 4 octobre 2019

PEIP 1ère année

2019-2020

Durée : 2h

Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées. Toutes les réponses aux questions doivent être justifiées. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation. ***Les parties 1 et 2 sont à rendre sur des copies séparées et sont notées chacune sur 10 points.***

PARTIE 1

Exercice 1

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère la propriété suivante :

$$\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

1. Que signifie cette propriété ?
2. Donner sa contraposée.
3. Donner sa négation.
4. Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante : « L'application f est surjective ».
5. Donner un exemple d'une application surjective qui ne soit pas injective. *Vous prendrez le soin de justifier la surjectivité et la non injectivité de l'application que vous proposez en exemple.*
6. Quel critère suffisant (autre que celui donné par la définition) permet d'affirmer qu'une application est injective ?

Exercice 2 On considère l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$

1. Déterminer son domaine de définition $\mathscr{D}_g$.
2. Calculer $g([0,1])$ et $g([-1,1])$.
3. Déterminer l'image directe de g notée $\mathscr{I}(g)$.
4. Déterminer les images réciproques suivantes : $g^{-1}([1,\sqrt{2}]), g^{-1}([1,+\infty[), g^{-1}(\{\sqrt{2}\})$ et $g^{-1}(\{0\})$.
5. g est-elle injective ?
6. g est-elle surjective ?
7. Déterminer deux ensembles $I \subset \mathscr{D}_g$ et $J \subset \mathbb{R}$ de manière que l'application $\tilde{g} : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$ soit bijective et calculer son application réciproque $\tilde{g}^{-1}$.

Exercice 3 Soient $A = [-1, 0]$, $A' = [0, 1]$ et $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ une application.

Calculer $h(A \cap A')$ et $h(A) \cap h(A')$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3+2x}{2-x} \end{array}$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Donner deux ensembles $E, F \subset \mathbb{R}$ tels que $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \dfrac{3+2x}{2-x} \end{array}$ soit bijective.
4. Déterminer $\tilde{f}^{-1}$, l'application réciproque de $\tilde{f}$.

PARTIE 2

Exercice 5 On considère les applications $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x^2}{1+x^4} \end{array}$

1. Montrer que la composition $g \circ f$ existe. Préciser son ensemble de départ, son ensemble d'arrivée et calculer $(g \circ f)(x)$ pour tout x tel que ce soit défini.
2. L'application $f \circ g$ existe-t-elle ? Si oui, la déterminer.
3. Posons $h = g \circ f$ et notons $\mathscr{D}_h$ son ensemble de départ.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathscr{D}_h, \quad h(x) = h\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (b) h est-elle injective ?

Exercice 6 On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (n,m) & \longmapsto & n \times m + 1 \end{array}$.

1. φ est elle injective ?
2. φ est elle surjective ?
3. φ admet-elle une application réciproque ?

Exercice 7 On considère E, F et G trois ensembles quelconques. *Les questions suivantes sont indépendantes.*

1. Soient $k : E \to F$ une application et $B, B' \subset F$. Montrer que $k^{-1}(B \cap B') = k^{-1}(B) \cap k^{-1}(B')$.
2. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
3. Montrer que si $E \cup F = F \cap G$ alors $E \subset F \subset G$.

Exercice 8 On considère les applications $h : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow &]0,1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$ et $k : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow &]0,1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \end{array}$.

1. Montrer que pour tout x dans $]0,1]$, $(k \circ h)(x) = x$.
2. Montrer que pour tout x dans $]0,1]$, $(h \circ k)(x) = x$.
3. Que peut-on déduire des questions précédentes ?