Introduction à l'analyse

PEIP 1ère année

Devoir surveillé 1

2021-2022

Mercredi 03 novembre 2021

Durée : 02h

Calculatrices, notes de cours/TD ne sont pas autorisées. Toutes les réponses aux questions doivent être justifiées. La rigueur des raisonnements, la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Les parties 1 et 2 sont à rendre sur des copies séparées et sont notées chacune sur 10 points.

PARTIE 1

Exercice 1 Soient E, F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une application.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) f est une application.
   (b) f est injective, sa négation, puis sa contraposée.
   (c) f n'est pas décroissante.
   (d) f est surjective.
   (e) Donner un exemple d'une application qui n'est ni injective ni surjective.
   (f) Soit maintenant $f : E \to F$ une application strictement croissante, montrer qu'elle est injective.
2. Soient A un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F. Donner les définitions des ensembles $f(A)$ (image de A par f) et de $f^{-1}(B)$ (image réciproque de B par f).

Exercice 2 On considère l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = x(1-x).$$

1. Soit y un réel fixé, déterminer $f^{-1}(\{y\})$. En déduire que cette fonction n'est ni injective ni surjective.
2. Déterminer deux ensembles I et J pour que l'application $f : I \to J$ soit une bijection et donner son application réciproque.

Exercice 3 Résoudre sur son domaine de validité l'équation suivante :

$$\sqrt{\frac{13}{4} - x} = x + \frac{1}{2}. \qquad (\star)$$

PARTIE 2

Exercice 4 Résoudre sur son domaine de validité l'équation suivante :

$$|x-2| + |x+1| = 4. \qquad (\star\star)$$

Exercice 5

1. Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives ou rien de cela.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ définie par } f(x,y) = xy \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ définie par } g(x) = (x, x^2).$$

2. Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ et dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives ou pas.

Exercice 6 On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2},$$

On rappelle que Im$f = f(\mathbb{R})$ est l'image de l'application f.

1. f est-elle injective ? est-elle surjective ?
2. Montrer que Im$f = [-1, 1]$.
3. On considère la restriction de f à l'intervalle $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[-1, 1]$, qu'on notera encore f, c'est-à-dire

$$f : [-1,1] \to [-1,1] \text{ définie par } f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Montrer qu'elle est bijective et déterminer sa fonction réciproque.