Corrigé du devoir surveillé 1

[3pt] **Exercice 1. Questions de cours** cf cours.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell_- < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_+ > 0$.

[2pt] 1. Montrer qu'il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.
Comme $\ell_- < \frac{\ell_-}{2}$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell_-$, par proposition du cours, il existe $K_- \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \leq K_- \quad f(x) < \frac{\ell_-}{2} < 0$ donc $a = K_-$ convient. De même, il existe $K_+ \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq K_+ \quad f(x) > \frac{\ell_+}{2} > 0$ donc $b = K_+$ convient.

[1pt] 2. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$.
Comme f est continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a, b]$.

[2pt] 3. On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$.
On a $\lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to0^\pm} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc par composition des limites, $\lim_{x\to0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to0^-} \varphi(x) = \frac{\pi}{2} = \varphi(0)$.
De plus, pour $x \neq 0$, on a $\varphi'(x) = \frac{-2}{x^3}\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}} = \frac{-2x}{x^4+1}$, donc $\lim_{x\to0^+} \varphi'(x) = \lim_{x\to0^-} \varphi'(x) = 0$.
Par théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$ (appliqué sur $[0, +\infty[$ puis sur $)-\infty, 0]$ en réalité), φ est donc de classe $\mathscr{C}^1$.

[1pt] 4. Si on suppose seulement $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue avec $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell_- \leq 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_+ \geq 0$, existe-t-il forcément $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$?
Non, la fonction φ de la question précédente est un contre-exemple car $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$, φ est continue mais $\forall t > 0 \quad \arctan(t) > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) > 0$.

Exercice 3. On cherche à optimiser l'éclairement d'une portion de rue de longueur 1 (On ne précise pas les unités, car on fait des math quand même et ce texte ne sert qu'à introduire la constante a !) située entre 2 réverbères. On munit la rue d'un axe. L'intensité lumineuse du réverbère situé en $x = 0$ est fixée à 1 et l'intensité lumineuse du réverbère situé en $x = 1$ vaut a^3 pour un certain $a \in]1, +\infty[$. L'éclairement de la rue au point x est alors donné par

$$f : \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^2} + \frac{a^3}{(1-x)^2} \end{array}.$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on admet que $f'(x) = \frac{\big((a+1)x-1\big)\big((2a^2+1)x^2-(a+2)x+1\big)}{x^3(1-x)^3}$.

1. Montrer qu'il existe un unique point critique $x_0 \in]0, 1[$ dont on donnera la valeur en
[1,5pt] fonction de a.
On a $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \big((a+1)x-1\big)\big((2a^2+1)x^2-(a+2)x+1\big) = 0 \Leftrightarrow (a+1)x-1 = 0$ car $\Delta = (a+2)^2 - 4(2a^2+1) = a(4-7a) < 0$. Donc $x_0 = \frac{1}{1+a} \in]0, 1[$ est l'unique point critique.

[1,5pt] 2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\forall x \in]0, \alpha[\cup]1-\alpha, 1[\quad f(x) > f(\frac{1}{2})$.

Comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$, en posant $M = f(\frac{1}{2})$ dans la définition de ces limites, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $\forall x \in]0, \alpha_1[\quad f(x) > f(\frac{1}{2})$. De même, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que $\forall x \in]1-\alpha_2, 1[\quad f(x) > f(\frac{1}{2})$. Alors $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ convient.

[2pt] 3. Montrer que f admet un minimum global sur $]0, 1[$.

On commence par remarquer que nécessairement $\frac{1}{2} \in [\alpha, 1-\alpha]$ d'après la définition de α à la question précédente.

Comme f est continue sur $[\alpha, 1-\alpha]$, par théorème de Weierstrass, il existe $\beta \in [\alpha, 1-\alpha]$ tel que $f(\beta) = \min_{[\alpha, 1-\alpha]} f$. Montrons que $f(\beta) = \min_{]0,1[} f$:

Soit $x \in]0, 1[$. Si $x \in [\alpha, 1-\alpha]$, alors $f(\beta) \leq f(x)$ par définition de β et si $x \notin [\alpha, 1-\alpha]$, alors $f(\beta) \leq f(\frac{1}{2}) < f(x)$ d'après la question précédente. Donc $f(\beta)$ est bien un minimum global de f.

[1pt] 4. En quel point est atteint ce minimum ? Justifier.

Un minimum global est un minimum local et comme f est dérivable sur $]0, 1[$, d'après le cours, ce minimum doit être un point critique de f donc le minimum est atteint en $x_0 = \frac{1}{1+a}$.

[2pt] 5. Quelle est la valeur minimale de $a \in]0, +\infty[$ pour avoir $\forall x \in]0, L[\quad f(x) \geq e^3$, c'est à dire une rue bien éclairée tout en faisant des économies d'énergie ?

On a $f(x_0) = f\left(\dfrac{1}{1+a}\right) = (1+a)^2 + a(1+a)^2 = (1+a)^3$. Comme la fonction cube est bijective et croissante, on a $f(x_0) \geq e^3 \Leftrightarrow (1+a) \geq e \Leftrightarrow a \geq e-1$ et comme $f(x_0)$ est la valeur minimale de f, on a $f \geq e^3 \Leftrightarrow a \geq e-1$ donc $a = e-1$ est la valeur minimale de a pour avoir une rue bien éclairée.

Exercice 4.

[1pt] 1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

Soit $x > 0$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction ln entre x et $x+1$ (possible car ln est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$). Alors, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}(x+1-x) = \frac{1}{c}$. Mais comme $x < c < x+1$, on a $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ d'où le résultat.

[2pt] 2. En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a $\ln(n+1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} < 1 + \ln(n)$.

Indication : On pourra commencer par encadrer $\frac{1}{k}$ pour $1 \leq k \leq n$ à l'aide de la question précédente.

Soit $n \in \mathbb{N}$ ave c$n \geq 2$. Soit $1 \leq k \leq n$. D'après l'inégalité de droite dans la question précédente, on a $\ln(k+1) - \ln(k) < \dfrac{1}{k}$. Donc en sommant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on obtient l'inégalité de gauche d'après la formule sur les sommes télescopiques.

Pour $2 \leq k \leq n$, d'après l'inégalité de gauche avec $x = k-1$ dans la question précédente, on a $\dfrac{1}{k} < \ln(k) - \ln(k-1)$. Donc en sommant $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln(k) - \ln(k-1)\Big) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$ d'où le résultat en ajoutant 1 des deux côtés.

[2pt] 3. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et converge vers une limite $\gamma \in [0, 1[$.

D'après les questions précédentes, $\forall n \geq 2 \quad 1 > u_n > \ln(n+1) - \ln(n) > 0$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) < 0$. Donc la suite est décroissante et majorée, elle est donc convergente. On pose $\gamma = \lim u_n$ et en passant à la limite dans l'inégalité, on a $0 \leq \gamma \leq u_2 < 1$.