Mathématiques 2 : Analyse et Probabilités

Licence MPCI - Semestre 2

2019-2020

Durée : 1h30

DEVOIR SURVEILLÉ N°1

Mardi 11 février 2020

Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. **[2points]** On considère la fonction $h :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos(\frac{1}{x})}{\ln(|x|)} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \alpha & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer α pour que h soit continue en 0.
2. Montrer que pour cette valeur de α, h est dérivable en 0 puis donner la valeur de $h'(0)$.

Exercice 2. **[3points]** On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.
4. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et donner la définition de son prolongement noté $\tilde{f}$.
5. Montrer que $\tilde{f} \in \mathscr{C}^1([0, +\infty[)$.

Exercice 3. **[5points]** Soient I un intervalle ouvert, $a, b \in I$ avec $a < b$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable sur I. On considère la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in I$ par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}\big(f'(a) + f'(x)\big) + K(x-a)^3$$

où K est le nombre réel tel que $g(b) = 0$.

1. Justifier que g est deux fois dérivable sur I.
2. Calculer pour tout $x \in I$, $g'(x)$ et $g''(x)$.
3. Calculer $g(a)$ et $g'(a)$.
4. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
5. Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}\big(f'(a) + f'(b)\big) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(\theta). \quad (\star)$$

Exercice 4. [5points] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$ et telle que

$$f(0) = f'(0) = f(1) = 0.$$

On introduit la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que f est bornée sur $[0,1]$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, il existe $\theta_x \in]0,1[$ tel que $g(x) = f'(\theta_x)$.
   Indication : on pourra appliquer le TAF à f sur $[0,x]$.
3. (a) Comparer $g(0)$ et $g(1)$.
   (b) Montrer que g est continue en 0.
   (c) Justifier que g est dérivable sur $]0,1[$.
   (d) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0,1[$.
4. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $cf'(c) = f(c)$.
5. Montrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f en c passe par l'origine.

Exercice 5. [5points] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que

$$f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) < 0,\ f'(0) > 0 \text{ et } f'(1) > 0.$$

On note $g : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ le taux d'accroissement de f en 0.

1. Tracer la courbe représentative d'une fonction vérifiant les mêmes hypothèses que f.
2. Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion « $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = f'(0)$. »
3. Montrer qu'il existe un sous-intervalle I de $]0,1]$ tel que $\forall x \in I, g(x) > \dfrac{f'(0)}{2}$.
4. En déduire qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) > 0$.
5. Montrer que f admet au moins deux points critiques dans $]0,1[$.
6. Peut-on déduire de ce qui précède que f admet au moins deux extrema locaux sur $]0,1[$?

. . . .

Exercice 6. [Bonus hors barème sur 1,5points]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} = \exp\left[\frac{\varphi'(c)}{\varphi(c)}(b-a)\right]. \quad (\star)$$