Introduction à l'analyse

PEIP 1ère année

2018-2019

DEVOIR SURVEILLÉ N°1

Vendredi 12 octobre 2018

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

NOM : .... PRÉNOM : .... GROUPE : .....

PARTIE 1 : PARTIE 2 : NOTE FINALE : /20

PARTIE 1

Exercice 1. On considère E, F, G et H des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux applications.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

   (a) L'application f est bijective : ....

   (b) L'application f n'est pas bijective : ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. On considère A et B deux sous-ensembles de F.

   (a) Donner la définition de l'ensemble $f^{-1}(A) =$..

   (b) Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$..

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. On suppose maintenant que $E = G = [-1, 1]$ et que f et g vérifient respectivement les propriétés suivantes :

$$\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x) \quad (1)$$

$$\forall y \in G,\ g(-y) = g(y). \quad (2)$$

(a) Comment appelle-t-on une application qui vérifie (1) ? Une application qui vérifie (2) ? . .

....

....

....

(b) Donner un exemple d'application vérifiant (1). Justifier votre réponse. . . . .

....

....

....

(c) Donner un exemple d'application vérifiant (2). Justifier votre réponse. . . . .

....

....

(d) Donner une condition pour que l'application $g \circ f$ existe et donner sa définition. . . . .

....

....

....

....

(e) Sous la condition donnée en 3.(d), montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$, $(g \circ f)(-x) = (g \circ f)(x)$..

....

....

....

....

....

....

(f) L'application $g \circ f$ est-elle injective ? Justifier la réponse. . . . .

....

....

....

Exercice 2. On considère les applications

$$f\colon \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x-1} \end{array}, \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [2,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2+2 \end{array} \text{ et } h\colon \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+1} \end{array}.$$

1. Après avoir montré que la composée $f \circ g$ existe, expliciter sa valeur. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. Après avoir montré que la composée $f \circ g \circ h$ existe, montrer que pour tout x dans $]-1,+\infty[$, $(f \circ g \circ h)(x) = \dfrac{\sqrt{1+(x+1)^2}}{x+1}$. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 3. On considère l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x. \end{array}$

1. Dresser le tableau de variations de l'application g sur $\mathbb{R}$.

x	
g'	
g	

2. Donner deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ de sorte que l'application $g : I \to J$ soit bijective. Justifier votre réponse.

3. Déterminer la réciproque de l'application $g : I \to J$.

Introduction à l'analyse

PEIP 1ère année 2018-2019

DEVOIR SURVEILLÉ N°1

Vendredi 12 octobre 2018

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

NOM : .... PRÉNOM : .... GROUPE : .....

PARTIE 1 : PARTIE 2 : NOTE FINALE : /20

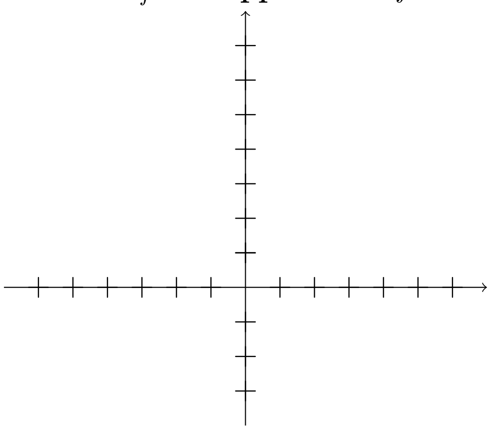
PARTIE 2

Exercice 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = |1-x|+x+2$.

1. Compléter les égalités suivantes et tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de l'application f.

$$|1-x| = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } x \leqslant \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } x \geqslant \ldots\ldots \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } x \leqslant \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } x \geqslant \ldots\ldots \end{cases}$$



2. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 3$. ....

....

....

....

....

....

....

....

3. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. ....

....

....

....

....

Exercice 5. On considère les applications $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, x^2) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$.

1. L'application f est-elle injective ? ....

....

....

....

....

2. L'application f est-elle surjective ?..

....

....

....

....

....

....

3. L'application g est-elle injective ?..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. $(0, 1)$ admet-il un antécédent par g ? Que peut-on en déduire sur g ?..

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 6.

1. Soit $y \in]0, e^{-2} + \frac{2}{e}]$ fixé. On considère le polynôme $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini pour tout X dans $\mathbb{R}$ par
$$P(X) = X^2 + 2X - y.$$
   (a) Déterminer en fonction de y le discriminant du polynôme P que l'on notera Δ_y.

   (b) Justifier que le polynôme P admet deux racines réelles X_1 et X_2 que l'on déterminera.

   (c) Montrer que pour tout y dans $]0, e^{-2} + \frac{2}{e}]$, $\sqrt{1+y} - 1 > 0$.

   (d) Montrer que pour tout y dans $]0, e^{-2} + \frac{2}{e}]$, $\ln(\sqrt{1+y} - 1) \leqslant -1$.

2. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc}]-\infty,-1] & \longrightarrow &]0, e^{-2}+\frac{2}{e}] \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+2}{e^{-x}}. \end{array}$ En résolvant l'équation $y = f(x)$ pour $y \in]0, e^{-2}+\frac{2}{e}]$, montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}.

Indication : on pourra utiliser les résultats de la question 1)...................................

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....