Université Aix-Marseille 2014–2015

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Corrigé du devoir surveillé n° 2

Exercice 1.

La fonction g_1 est dérivable sur $]-1,1[$, avec $g_1'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Pour que g_2 soit dérivable en x, il faut que la fonction ln soit dérivable en x. Autrement dit, il faut que $x > 0$. La fonction g_2 est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $g_2'(x) = -3\cos^2(x)\sin(x)\ln(x) + \frac{\cos^3(x)}{x} = \cos^2(x)\left(\frac{\cos(x)}{x} - 3\sin(x)\ln(x)\right)$.

Pour tout x, on a $g_3(x) = e^{\tan(x)\ln(\mathrm{ch}(x))}$. Pour que g_3 soit dérivable en x, il faut que la fonction ln soit dérivable en $\mathrm{ch}(x)$, ce qui est toujours le cas car $\mathrm{ch}(x) \geq 1 > 0$, et il faut que la fonction tan soit dérivable en x. Autrement dit, il faut que x ne soit pas un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. La fonction g_3 est donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$, avec $g_3'(x) = \big(\mathrm{ch}(x)\big)^{\tan(x)}\left(\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{\cos^2(x)} + \frac{\tan(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right) = \big(\mathrm{ch}(x)\big)^{\tan(x)}\left(\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{\cos^2(x)} + \tan(x)\mathrm{th}(x)\right)$.

Pour que g_4 soit dérivable en x, il faut que $\mathrm{ch}(x^2+1)$ ne s'annule pas, ce qui est toujours le cas. La fonction g_4 est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g_4'(x) = -\frac{2x\mathrm{sh}(x^2+1)}{\mathrm{ch}^2(x^2+1)} = -\frac{2x}{\mathrm{ch}(x^2+1)}\mathrm{th}(x^2+1)$.

Pour que g_5 soit dérivable en x, il faut que la fonction ln soit dérivable en $\sin(x)$, c'est-à-dire que $\sin(x) > 0$. Autrement dit, il faut que x soit dans un intervalle de la forme $]2k\pi, (2k+1)\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. La fonction g_5 est donc dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$, avec $g_5'(x) = \frac{1}{1+\ln^2(\sin(x))}.\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\mathrm{cotan}(x)}{1+\ln^2(\sin(x))}$.

Pour que g_6 soit dérivable en x, il faut que les fonctions racine et ln soit dérivables en x, c'est-à-dire que $x > 0$, et il faut que la fonction argch soit dérivable en $1+\sqrt{x}+x\ln^2(x)$, c'est-à-dire que $1+\sqrt{x}+x\ln^2(x) > 1$, ou encore $\sqrt{x}+x\ln^2(x) > 0$, ce qui est bien le cas car tous les termes sont positifs et $\sqrt{x}$ est même strictement positif. La fonction g_6 est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g_6'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\ln^2(x)+2\ln(x)}{\sqrt{(1+\sqrt{x}+x\ln^2(x))^2-1}} = \frac{1+2\sqrt{x}\ln(x)(\ln(x)+2)}{2\sqrt{x(2+\sqrt{x}+x\ln^2(x))(\sqrt{x}+x\ln^2(x))}}$.

Exercice 2.

1. Par composition des fonctions cosinus et inverse, la fonction f est définie en x si et seulement $\cos(x) \neq 0$. On en déduit que le domaine de définition maximale de f est $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$\cos\big(2\arctan(t)\big) = 2\cos^2\big(\arctan(t)\big) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\big(\arctan(t)\big)} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
3. On definit une primitive F de f par $F(z) = \int_0^z \frac{dx}{\cos(x)}$. On fait le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a alors $x = 2\arctan x$ car x varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et $dx = d\big(2\arctan(t)\big) = \frac{2dt}{1+t^2}$. Cela donne donc
$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^{\tan\left(\frac{z}{2}\right)} \frac{2dt}{\cos\big(2\arctan(t)\big)(1+t^2)} = \int_0^{\tan\left(\frac{z}{2}\right)} \frac{2dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}(1+t^2)} = \int_0^{\tan\left(\frac{z}{2}\right)} \frac{2dt}{1-t^2} \\ &= 2[\mathrm{argth}(t)]_0^{\tan\left(\frac{z}{2}\right)} = 2\,\mathrm{argth}\left(\tan\left(\frac{z}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Exercice 3.

La fonction argsh est une primitive de f_1.

La fonction $\left(x \mapsto \tan(x) + \frac{x^4}{4}\right)$ est une primitive de f_2.

La fonction F_3 définie par $F_3(x) = \int_0^x t\cos(t)dt$ est une primitive de f_3. Par intégration par parties en décomposant $t\cos(t) = u(t)v'(t)$ avec $u(t) = t$ et $v(t) = \sin(t)$, on obtient $F_3(x) = [t\sin(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t)dt = x\sin(x) + [\cos(t)]_0^x = x\sin(x) + \cos(x) - 1$. La fonction $(x \mapsto x\sin(x) + \cos(x))$ est donc une primitive de f_3.

La fonction F_4 définie par $F_4(x) = \int_0^x \mathrm{ch}(t)\cos(t)dt$ est une primitive de f_4. Par intégration par parties en décomposant $\mathrm{ch}(t)\cos(t) = u(t)v'(t)$ avec $u(t) = \mathrm{ch}(t)$ et $v(t) = \sin(t)$, on obtient $F_4(x) = [\mathrm{ch}(t)\sin(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{sh}(t)\sin(t)dt$. En réintégrant par partie en décomposant $\mathrm{sh}(t)\sin(t) = w(t)z'(t)$ avec $w(t) = \mathrm{sh}(t)$ et $z(t) = -\cos(t)$, on obtient $F_4(x) = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + [\mathrm{sh}(t)\cos(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{ch}(t)\cos(t)dt = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x) - F_4(x)$. On en déduit que $2F_4(x) = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x)$ et donc que la fonction $\left(x \mapsto \frac{\mathrm{ch}(x)\sin(x)+\mathrm{sh}(x)\cos(x)}{2}\right)$ est une primitive de f_4.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_5(x) = 2\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}$. Or $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$. On en déduit que la fonction $\left(x \mapsto 2\ln(x^2+x+1) - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ est donc une primitive de f_5.

La fonction F_6 définie par $F_6(x) = \int_0^x \arctan(t)dt$ est une primitive de f_6. Par intégration par parties en décomposant $\arctan(t) = v'(t)u(t)$ avec $v(t) = t$ et $u(t) = \arctan(t)$, on obtient $F_7(x) = [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt = x\arctan(x) - \frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. La fonction $\left(x \mapsto x\arctan(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)$ est donc une primitive de f_6.

Exercice 4.

On définit f par $f(x) = \mathrm{argsh}\left(2x\sqrt{x^2+1}\right) - 2\mathrm{argsh}(x)$. La fonction racine n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$. Donc, par sommes, produit et composés et fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\sqrt{x^2+1} + \frac{2x.2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1+4x^2(x^2+1)}} - \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{4(x^2+1)+4x^2}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{1+4x^2+4x^4}} - \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(1+2x^2)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Or $1 + 2x^2 > 0$, donc $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 0$. L'ensemble $\mathbb{R}$ étant un intervalle, on en déduit que la fonction f est constante. De plus, par calcul direct, $f(0) = 0$. On en déduit quela fonction f est nulle et donc que $\mathrm{argsh}\left(2x\sqrt{x^2+1}\right) = 2\mathrm{argsh}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.