Université d'Aix-Marseille **Année 2017-2018**
L1-PEIP **U.E. Introduction à l'Analyse**

Examen DS2

vendredi 24 novembre 2017

durée : 2h

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation. Le barème est donné à titre indicatif.

On rendra deux copies séparées : COPIE 1 (exo 1)   COPIE 2 (exo 2 + 3 + 4)

Exercice 1 (FONCTIONS USUELLES-10POINTS)

1. (3pts) Donner les domaines de définition dans $\mathbb{R}$ des applications suivantes et établir si elles sont éventuellement paires ou impaires, en justifiant la réponse.

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad g(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x) - \sqrt{5}}, \quad h(x) = \sqrt{1 - |x-2|}.$$

2. (2.5pts)
   (a) Simplifier les expressions suivantes :
   $$A = \arctan(\tan(\frac{4\pi}{3})) \text{ et } B = \arccos(\sin(\frac{\pi}{3})).$$
   (b) Montrer que pour tout $a, b \in]0, \frac{\pi}{4}[$,
   $$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$
   (c) En déduire la valeur de $C = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan(\frac{1}{3})$.

3. (2.5pts)
   (a) Pour tout $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donner une relation qui relie $\tan^2(\theta)$ et $\cos^2(\theta)$ (sans la démontrer).
   (b) Utiliser cette relation pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
   (c) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.
   (d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\cos(3\arctan(x)) = \frac{1 - 3x^2}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

4. (2pts) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
   (a) $2\sin^2(x) + 3\sqrt{2}\sin(x) - 4 = 0$
   (b) $4\sin(x)\cos(x) - \sqrt{3} = 0$.

Exercice 2 (LIMITES-6POINTS)

1. $(0,5\text{pt})$ Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante :

$$\textit{L'application } f :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \textit{ tend vers } -\infty \textit{ lorsque } x \textit{ tend vers } 0^+.$$

2. (2pts)Montrer <u>à l'aide de la définition</u> les limites suivantes :
   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4} = +\infty.$
   (b) $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$
3. $(3,5\text{pts})$ Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+\pi}. \qquad b) \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}). \qquad c) \lim_{x\to 0} \frac{2\tan(x) - \sin(2x)}{\sin^3(x)}.$$

Exercice 3 (CONTINUITÉ-$3,5$POINTS)

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{-x^3 + 8x - 3}{|x| - 3}.$$

1. $(0,5\text{pt})$ La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. $(1,5\text{pts})$Calculer $\lim_{x\to 3} f(x)$ et $\lim_{x\to -3} f(x)$.
3. $(0,5\text{pt})$ f est-elle prolongeable par continuité en $x = 3$?
4. (1pt) Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et qui soit égale à f sur $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$?

Exercice 4 (CONTINUITÉ-$2,5$POINTS)

1. $(1,5\text{pts})$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } \ x < 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } \ x > 0. \end{cases}$$

   (a) f a-t-elle une limite à droite en 0 ?
   (b) f a-t-elle une limite à gauche en 0 ?
   (c) f est-elle continue en 0 ?

2. (1pt) Étudier la continuité en 0 de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \cos(x) & \text{si } \ x < 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} & \text{si } \ x > 0. \end{cases}$$