Université d'Aix-Marseille | **Année 2016-2017**
L1-PEIP | **U.E. Introduction Analyse**

Examen DS2

vendredi 09 décembre 2016

durée : 1h30

Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

On rendra deux copies séparées : COPIE 1 (exo 1 + 2) COPIE 2 (exo 3 +4)

Exercice 1. Questions de cours/Applications

1. (a) On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4, \ \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty.$$
   (b) Démontrer à l'aide de la définition la limite suivante : $\lim_{x\to 1} 3x - 1 = 2$.
2. (a) Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers 2 et quand x tend $+\infty$, où $f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x^2+x-6}$.
   (b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\sqrt{x^2+x+1} - x$.
3. (a) Enoncer le théorème des valeurs intermédiares.
   (b) Montrer que le polynôme $P : x \mapsto x^{20} + 12x^7 - 7x^2 + 4x - 1$ admet au moins une racine dans l'intervalle $[-1, 2]$.

Exercice 2.

1. Montrer que la fonction f définie par
$$f(x) = x \ln x + e^x \text{ si } x > 0 \text{ et } f(x) = 1 \text{ si } x \leq 0$$
est continue en 0.
2. En notant
$$h(x) = xe^{\sqrt{x}},$$
calculer la dérivée de h en précisant le domaine de définition de h et celui de h'.

Exercice 3. Calcul de primitives

1. En utilisant le changement de variable $t = e^x$, calculer $\int \frac{1}{1+e^x} dx$.
2. En utilisant une intégration par parties, calculer $\int \arctan x dx$.
3. En utilisant une double intégration par parties, calculer $I = \int e^x \sin x dx$.

Exercice 4. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : [\frac{1}{16}, \frac{1}{4}] \to I$ une fonction définie par

$$g(x) = \sin(\pi\sqrt{x}).$$

1. Justifier que g est dérivable sur $[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}]$ puis calculer sa dérivée.
2. Dresser le tableau des variations de g.
3. En déduire $g([\frac{1}{16}, \frac{1}{4}])$.
4. Déterminer I de sorte que $g : [\frac{1}{16}, \frac{1}{4}] \to I$ soit bijective.
5. Donner l'application réciproque de g.
6. Après avoir précisé sur quel domaine elle est dérivable, déterminer la dérivée de g^{-1}.