Devoir surveillé n°2 : Corrigé

Exercice 1.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leqslant \sin(\frac{1}{x}) \leqslant 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$. En utilisant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Ainsi, ℓ existe et $\ell = 0$.
2. f admet une limite finie en 0, elle est donc prolongeable par continuité en 0.
3. (a) Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$,
$$g'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } g''(x) = \left(6x - \frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$
(b) Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, en utilisant le même argument qu'en 1., on a
$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x-0} = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$
Ceci prouve que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.
(c) En utilisant comme en 1. le théorème des gendarmes, on a
$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = g'(0).$$
Ainsi, g' est continue en 0.
(d) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lambda$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos(n\pi)$, $n \in \mathbb{N}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda$. Les sous-suites de rangs pairs et impairs définies pour tout n dans $\mathbb{N}$ par
$$u_{2n} = \cos(2n\pi) = 1 \text{ et } u_{2n+1} = \cos((2n+1)\pi) = -1$$
tendent alors aussi vers λ. Par conséquent, $-1 = 1$ ce qui est absurde donc la fonction $h : x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0^+.
(e) Par l'absurde, supposons que $\tilde{\tau} : x \mapsto 3x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ admette une limite notée $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ en 0. Alors $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}(3x\sin(\frac{1}{x}) - \tilde{\tau}(x)) = 0 - \alpha = -\alpha$ ce qui est impossible car h n'admet pas de limite en 0^+. Ainsi, $\tilde{\tau}$ n'admet pas de limite en 0.
(f) On remarque que pour tout x dans $\mathbb{R}^*$,
$$\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0} = \frac{3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x-0} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \tilde{\tau}(x).$$
D'après ce qui précède, $\tilde{\tau}$ n'admet pas de limite en 0, donc g' n'est pas dérivable en 0.
(g) Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, on a $g(x) = x^3\sin(\frac{1}{x}) = x^2 \times x\sin(\frac{1}{x})$. On pose $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\epsilon(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
ϵ vérifie bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2\epsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

(h) D'après ce qui précède, il existe $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ et $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vérifiant $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$) tels que pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + x^2 \epsilon(x).$$

On peut donc en déduire que g admet un développement limité en 0 à l'ordre 2.

Exercice 2.

1. φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc φ et φ' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et h aussi comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$h'(x) = -e^{-x}\big(\varphi(x) + \varphi'(x)\big) + e^{-x}\big(\varphi'(x) + \varphi''(x)\big) = e^{-x}\big(\varphi''(x) - \varphi(x)\big).$$

2. (a) h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc en particulier continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus $h(a) = e^{-a}\big(\varphi(a) + \varphi'(a)\big) = 0$, $h(b) = e^{-b}\big(\varphi(b) + \varphi'(b)\big) = 0$, ainsi $h(a) = h(b)$ et h vérifie bien les trois hypothèses du théorème de Rolle.

   (b) En appliquant le théorème de Rolle à h sur $[a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. Or

$$h'(c) = 0 \Leftrightarrow e^{-c}\big(\varphi''(c) - \varphi(c)\big) = 0 \Leftrightarrow \varphi''(c) - \varphi(c) = 0 \Leftrightarrow \varphi''(c) = \varphi(c),$$

   d'où le résultat.

Exercice 3.

1. (a) Pour tout x dans I, $g_1(x) = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3)$.

   (b) Pour tout x dans I, $g_2(x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3)$.

   (c) Pour tout x dans I,

$$g(x) = \frac{2}{3}\left(1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!}\right) + \left(-x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3}\right) + o(x^3) = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x^3 + o(x^3).$$

   (d) Pour tout x dans I, on a $f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$.

   (e) Pour tout x dans I,

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \sqrt{\cos(x)} \\
&= \sqrt{1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)} = \sqrt{1+u} \text{ en posant } u = -\frac{x^2}{2!} + o(x^3), \text{ si } x \to 0 \text{ alors } u \to 0 \\
&= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3).
\end{aligned}$$

   (f) En utilisant ce qui précède, pour tout x dans I, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{f_2(x)} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{1-v} \text{ en posant } v = \frac{x^2}{4} + o(x^3), \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 0, v \text{ tend vers } 0 \\
&= 1 + v + v^2 + v^3 + o(v^3) \\
&= 1 + \left(\frac{x^2}{4}\right) + \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{4}\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{x^2}{4} + o(x^3).
\end{aligned}$$

2. On a pour tout x dans $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$

$$\begin{aligned}
h(x) &= g(x) \times f(x) \\
&= \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x^3\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) + o(x^3) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{12}x^2 - \frac{5}{12}x^3 + o(x^3) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - \frac{31}{36}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

3. La tangente à la courbe de la fonction h en 0 a pour équation l'équation $y = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x$. La position de la courbe par rapport à y est donnée par le signe de $-\frac{31}{36}x^3$. Comme $-\frac{31}{36}x^3$ change de signe en 0, on en déduit que la tangente traverse la courbe en 0.

Exercice 4.

1. (a) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

   (b) Fixons $\epsilon > 0$ et montrons l'existence d'un tel $\delta > 0$. D'après $(\star)$, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$,

   $$|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0|^\beta = ke^{\beta \ln(|x-x_0|)}.$$

   En supposant que $|x - x_0| < \delta$ on obtient alors comme $\beta > 0$ que $|f(x) - f(x_0)| < ke^{\beta \ln(\delta)}$. Il suffit alors de choisir $\delta > 0$ tel que $ke^{\beta \ln(\delta)} \leqslant \epsilon$ pour avoir $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Par exemple $\delta > 0$ tel que $ke^{\beta \ln(\delta)} = \epsilon$ ce qui donne $\delta = e^{\frac{1}{k}\ln(\frac{\epsilon}{k})} > 0$ et on a le résultat.

   (c) D'après $(\star)$, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$,

   $$|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0|^\beta.$$

   De cette façon, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, on en déduit que

   $$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leqslant k\frac{|x - x_0|^\beta}{|x - x_0|} = k|x - x_0|^{\beta-1} = ke^{(\beta-1)\ln(|x-x_0|)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \text{ car } \beta - 1 > 0.$$

   (d) Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a montré que le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admettait une limite finie égale à 0, ce qui implique que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

2. (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. f étant continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. Elle satisfait donc les hypothèses du théorème des accroissements finis.

   (b) D'après le théorème des accroissements finis appliqué sur $[x, y]$, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. La fonction f' étant identiquement nulle, on en déduit que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) - f(y) = 0$ ce qui donne le résultat demandé.

3. (a) $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

   (b) Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq \ell$ et supposons sans perte que $f(x_0) > \ell$. En posant $\epsilon = \dfrac{f(x_0) - \ell}{2} > 0$ dans l'assertion obtenue en 3.b., on obtient

   $$\exists A > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{f(x_0) - \ell}{2}$$

   D'après la question 2., on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_0)$ ce qui donne

   $$\forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow |f(x_0) - \ell| < \frac{f(x_0) - \ell}{2}$$

   ce qui est absurde car $|f(x_0) - \ell| = f(x_0) - \ell$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ell$.