POLYTECH MARSEILLE Aix-Marseille Université	**Introduction à l'analyse** PEIP 1ère année DEVOIR SURVEILLÉ 2 Vendredi 15 novembre 2019	2019-2020 Durée : 2h

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

NOM : .... PRÉNOM : .... GROUPE : ....

PARTIE 1 : /11 PARTIE 2 : /11 NOTE FINALE : /20

PARTIE 1

Exercice 1. **[1,5points]** Soient $a \in \mathbb{R}$, $I =]a, +\infty[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. « f est continue en x_0. »

   ....

2. « f n'est pas continue en x_0. »

   ....

3. « f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$. »

   ....

Exercice 2. **[2points]** Calculer les limites suivantes, si elles existent :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. $\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x)}{(\sin(x))^2}$

Exercice 3. **[1,5points]** Montrer en revenant à la définition avec quantificateurs la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3-2x}{x-4} = -2.$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 4. **[1,5points]** On considère la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \textbf{si } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ \alpha & \textbf{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de α l'application f est-elle continue en 0 ? ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 5. **[1,5points]** On considère la fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ par

$$g(x) = \sin\left(\frac{\pi\, x}{|x|}\right).$$

g est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, donner son prolongement par continuité.. ......

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 6. [3points]

1. Compléter les domaines de départ et d'arrivée des fonctions arccosinus et arctangente :

   $\arccos$: .... $\to$ .... et $\arctan$: .... $\to$ ....

2. Rappeler le domaine de définition (maximal) $\mathscr{D}_{\tan}$ de la fonction tangente. On a

   $\mathscr{D}_{\tan} =$..

3. Pour tout θ dans $\mathscr{D}_{\tan}$, rappeler la définition de $\tan(\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$. Pour tout $\theta \in \mathscr{D}_{\tan}$, on a $\tan(\theta) =$ ....

4. Compléter pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ les formules suivantes

   $\sin(a-b) =$..

   $\cos(a-b) =$..

5. **Montrer que pour tous a, b dans $\mathscr{D}_{\tan}$ tels que $\tan(a)\tan(b) \neq -1$, on a**

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

Soient $a, b \in \mathscr{D}_{\tan}$ tels que $\tan(a)\tan(b) \neq -1$. On a

$\tan(a-b) =$ ....

Introduction à l'analyse

PEIP 1ère année

DEVOIR SURVEILLÉ 2

Vendredi 15 novembre 2019

2019-2020

Durée : 2h

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

NOM : .... PRÉNOM : .... GROUPE : ....

PARTIE 1 : /11 PARTIE 2 : /11 NOTE FINALE : /20

PARTIE 2

Problème. [11points] Le but de cet problème est de résoudre l'équation suivante

$$\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (\star)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition E de l'équation $(\star)$. **[0,5point]**
   Indication : on pourra s'aider des questions posées à l'Exercice 6. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. (a) Compléter : $\arctan(0) =$ .... et $\arccos(0) =$ .... **[0,5point]**

   (b) En déduire que 0 n'est pas solution de l'équation $(\star)$. **[0,25point]** . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. (a) Montrer que pour tout x dans E, $\tan(\arctan(x)) \times \tan(\arctan(\frac{x}{3})) \neq -1$. **[0,5point]**........

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(b) En déduire que pour tout x dans E,

$$\tan\left(\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right) = \frac{2x}{x^2+3}.$$

Indication : on pourra s'aider des formules trigonométriques énoncées à l'Exercice 6. **[1point]**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ <u>fixé</u>. On pose $\theta = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$.

   (a) Exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de x. **[0,25point]** ....

   ....

   (b) Exprimer $\sin^2(\theta)$ en fonction de $\cos^2(\theta)$. **[0,25point]** On a $\sin^2(\theta) =$......................

   (c) Justifier que $\sin(\theta)$ est de signe constant. **[0,5point]** ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (d) En déduire que $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. **[0,5point]** ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

(e) Montrer que $\tan(\theta) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. **[0,5point]** ....

(f) Déduire des questions 3. et 4. que si x vérifie l'équation

$$\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right), \quad (\star)$$

alors x vérifie aussi l'équation $\dfrac{2x}{x^2+3} = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. $\quad (\star\star)$.

[1point]..

5. (a) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+3}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ sont de même signe sur $E \setminus \{0\}$.**[0,5point]**

....

....

....

....

....

....

....

(b) On considère le polynôme $P : x \mapsto x^6 + 6x^4 - 15x^2 - 36$, défini de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) = g(x) \Leftrightarrow P(x) = 0$. **[0,5point]**................................

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(c) Combien de racines réelles admet au plus le polynôme P ? **[0,25point]**. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(d) Déterminer deux réels a, b tels que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $P(x) = (ax^2 + b)(x^4 + 9x^2 + 12)$.

[0,5point]. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(e) Étudier le signe du polynôme $Q : x \mapsto x^4 + 9x^2 + 12$ sur $\mathbb{R}$. **[0,25point]**

(f) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(\star\star)$ définie à la question 4.(f). **[0,5point]**

6. (a) Compléter <u>successivement</u> les tableaux suivants **[2points]** :

θ	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\tan(\theta)$					
$\cos(\theta)$					

x	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$\arctan(x)$		
$\arctan(\frac{x}{3})$		
$\arccos(\frac{x}{2})$		

(b) Les réels $x_1 = \sqrt{3}$ et $x_2 = -\sqrt{3}$ sont-ils solutions de l'équation $(\star)$ ci-dessous :

$$\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (\star)$$

[0,5point] ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(c) Conclure en donnant toutes les solutions de l'équation $(\star)$. **[0,25point]** ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....