DS2 durée : 02h

Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

PARTIE I

Exercice 1.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire à l'aide des quantificateurs les formules suivantes:
   (a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, où $x_0 \in \mathbb{R}$.
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.
2. Montrer, en revenant à la définition avec quantificateurs, que:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-3}{x-4} = 2.$$
3. Déterminer les limites suivantes, si elles existent, en justifiant les résultats
   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.
   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(2x+1)}{\sin(3x)}$.
4. Montrer pour que tout x non nul dans $]-\pi, \pi[$, on a
$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))},$$
puis en déduire les limites suivantes $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1}$.

Exercice 2.

1. Résoudre les équations suivantes
   (a) $\cos(2x - \frac{5\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$.
   (b) $-\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$.
2. Simplifier les expressions suivantes: $\arctan\big(\tan(\frac{4\pi}{3})\big)$, $\arcsin\big(\sin((\frac{14\pi}{3})\big)$ et $\arccos\big(\sin(\frac{\pi}{3})\big)$.
3. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donner une relation qui relie $\tan^2(x)$ et $\cos^2(x)$, puis utiliser cette relation pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:
$$\cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

PARTIE II

Exercice 3.

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Rappeler les définitions de la continuité et de la dérivabilité de la fonction f au point x_0.

2. Vérifier que la fonction réelle $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0 et qu'elle n'est pas dérivable en 0.

3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^* \quad \text{avec } f(0) = 0.$$

   La fonction f est-elle continue en 0? Justifier votre réponse.

4. La fonction définie par

$$g(x) = \sin\left(\pi \frac{|x|}{x}\right) \text{ si } \ x \neq 0$$

   est-elle prolongeable par continuité en 0?
   Si c'est le cas, donner son prolongement par continuité qu'on notera $\tilde{g}$.

Exercice 4.

On considère, sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$, la fonction f définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Déterminer les dérivées des applications qui à x associent $\frac{1-x}{1+x}$ et $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

3. Dresser le tableau de variations de f, puis déduire qu'elle est bijective de $I =]-1, +\infty[$ dans un intervalle J qu'on déterminera.

4. Calculer $f(0)$. Sans déterminer la fonction réciproque de f, justifier pourquoi f^{-1} est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et calculer $(f^{-1})'(\frac{\pi}{4})$.

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par:

$$g(x) = f(x) + \arctan(x).$$

   Calculer $g(0)$ et $g'(x)$, puis déduire une formulation plus simple (une autre formulation) de la fonction f.