Examen DS3

10/01/2022

durée : 2h

Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

On rendra deux copies séparées : COPIE 1 (exo 1 + 2) COPIE 2 (exo 3 +4)

Exercice 1. Pour tout $x \in]0,1]$, soit $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)$.

1. Calculer $f(1)$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
2. Pourquoi f est continue sur $]0,1]$? Pourquoi f est dérivable sur $]0,1[$?
3. Pour tout $x \in]0,1]$, soit $u(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

   Vérifier que pour tout $x \in]0,1[$: $u'(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{1-x}}$, puis calculer $f'(x)(= -\dfrac{\sqrt{x}}{2x\sqrt{1-x}})$.
4. Montrer que f est une bijection de $]0,1]$ dans un intervalle J à déterminer.
5. Calculer $f(\frac{1}{2})$, $f^{-1}(\frac{\pi}{4})$, puis $(f^{-1})'(\frac{\pi}{4})$.

Exercice 2.

1. Trouver une primitive de la fonction $f(x) = \frac{x-1}{x(x-2)}$ sur l'intervalle $]0,2[$.
2. Trouver une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$.
3. Par une intégration par parties, calculer $\int x\cos x dx$ et $\int \arctan(x)dx$.
4. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$, calculer

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}dx.$$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(x) - 2xy(x) = \frac{2x}{1+x^2}e^{x^2}.$$

1. Trouver la solution générale de l'équation homogène associée à (E).
2. En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver une solution particulière de l'équation (E).
3. Donner les solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 4. Une des deux questions suivantes est au choix:

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

pour tout $x \in]0,1[$.
(Une solution particulière de l'équation (E) est à déterminer avec la méthode de la variation de la constante).

2. Déterminer les solutions sur $I\!R$ des équations différentielles suivantes:

(a) $y" + 4y' + 5y = 0$.

(b) $y" - 4y' + 3y = e^{2x}$;
(On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda e^{2x}$).

(c) $y" - 6y' + 9y = x^2 - 1$;
(On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$).