Mathématiques 2 : Analyse et Probabilités

Licence MPCI - Semestre 2

DEVOIR SURVEILLÉ

Mai 2020

2019-2020

Durée : 2h00

Les notes de cours et de TD ainsi que les calculatrices sont autorisées. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. **[5points]** Une loterie comporte 20 billets numérotés de 1 à 20 dont 2 gagnants, l'un pour un lot de 100€ et l'autre pour un lot de 60€. On achète 3 billets auprès du vendeur qui ne sait pas lesquels sont gagnants.

1. Justifier que le nombre de lots possibles de 3 billets que l'on peut acheter est égal à 1140.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants en faisant une hypothèse d'équiprobabilité *(le résultat final sera donné sous forme de fraction, non nécessairement irréductible)* :
   A : « Gagner les deux lots ».
   B : « Gagner le lot de 100€ uniquement ».
   C : « Gagner le lot de 60€ uniquement ».
   D : « Ne rien gagner ».
3. On définit la variable aléatoire X qui à tout ensemble de 3 billets achetés associe la somme gagnée. Déterminer Im(X) et calculer $\forall k \in$Im$(X), \mathbb{P}(X = k)$ *(le résultat final sera donné sous forme de fraction, non nécessairement irréductible).*
4. Calculer l'espérance de X notée $\mathbb{E}(X)$.
5. Proposer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que si le prix de vente du billet est fixé à $\frac{\mathbb{E}(X)}{n}$ alors la vente des 20 billets permet de récupérer la somme mise en jeu.

Exercice 2. **[1point]** En utilisant un équivalent, déterminer la limite suivante $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{3x^2} - 1)\tan^2(4x)}{x(1+\sin(x))^x}$.

Exercice 3. **[4points]** On considère les fonctions

$$g :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\ \to \ ]0,1], \quad x \mapsto \cos(x), \qquad h :]-1,+\infty[\ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad \varphi :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(\cos(x))$$

1. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 des fonctions g et h. *On justifiera l'existence de ces DL (nom de la formule utilisée et régularité minimale requise).*
2. Montrer que le DL en 0 à l'ordre 2 de la fonction φ s'écrit $\varphi(x) = \alpha\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer. *On justifiera l'existence de ce DL (nom de la formule utilisée et régularité minimale requise).*
3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_\varphi$ en 0 puis déterminer la position de la tangente par rapport à $\mathscr{C}_\varphi$ au voisinage de 0.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\varphi(x)}{x^2}$.
5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
   (b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Indication : on pourra utiliser la question 4.*

Exercice 4. **[2points]**

1. Donner la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 4 de la fonction exponentielle.
2. Écrire la formule obtenue à la question 1. avec $x = 1$.
3. En déduire une valeur approchée ℓ de e vérifiant $|e - \ell| \leqslant \frac{1}{40}$.

Exercice 5. **[4points]** Déterminer la limite de chacune des sommes de Riemann suivantes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}.$$

Indication : on pourra considérer la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_n = \ln(v_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6. **[4points]** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$ une subdivision régulière de $[a, b]$ où $\forall i \in \{0, ..., n\}$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On considère les fonctions $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a, b])$ définies par

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x_i) & \text{si} \quad x_i \leqslant x < x_{i+1} \ (0 \leqslant i \leqslant n-1) \\ f(b) & \text{si} \quad x = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \begin{cases} f(a) & \text{si} \quad x = a \\ f(x_{i+1}) & \text{si} \quad x_i < x \leqslant x_{i+1} \ (0 \leqslant i \leqslant n-1). \end{cases}$$

Notons que par construction de φ et ψ, on a $\forall x \in [a, b],\ \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x). \quad (\star)$

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$.
2. Pour $\epsilon > 0$ fixé, existe-il $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n}\big(f(b) - f(a)\big) \leqslant \epsilon$? Si oui, on prendra le soin de le définir de façon explicite et de justifier son appartenance à $\mathbb{N}^*$.
3. Déduire des questions précédentes que $f \in \mathscr{R}([a, b])$.
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i), \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) En utilisant l'inégalité $(\star)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\int_a^b f(x)dx + \frac{b-a}{n}f(a) \leqslant u_n \leqslant \int_a^b f(x)dx + \frac{b-a}{n}f(b). \quad (\star\star)$$
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.
   (c) Quel résultat connu vient-on de prouver ?
5. Si f est décroissante sur $[a, b]$, peut-on déduire de ce qui précède que $f \in \mathscr{R}([a, b])$?

....

Exercice 7. **[Bonus hors barème sur 3points]** Soient $g \in \mathscr{C}^1([0, 1])$, $f \in \mathscr{R}([0, 1])$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = n\int_0^{\frac{1}{n^2}} g'(x)f(x)xe^x dx.$$

On suppose que $\forall x \in [0, 1], f(x) \geqslant 0$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.