Année universitaire 2020-2021

Site : ☐Luminy ☐St-Charles ☒St-Jérôme ☐Cht-Gombert ☐Aix-Montperrin ☐Aubagne-Satis
Sujet session : ☐1er semestre - ☒2ème semestre - ☐Session 2 — Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : ☒L1 / ☐L2 / ☐L3 - ☐M1 / ☐M2 - ☐LP - ☐DU — Nom diplôme : MPCI
Code Apogée du module : SMP2U04J — Libellé du module : Mathématiques 2
Document autorisé : ☐OUI - ☒NON — Calculatrices autorisées : ☐OUI - ☒NON

Attention, ce sujet est prévu pour une durée de 1h et compte pour 10 points dans la note finale de l'examen. Chaque question comptera pour 1 point et comme il y a 11 questions, il y a une question bonus. Les exercices sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans le désordre. Vous pouvez sauter des questions sans les démontrer, mais admettre le résultat pour l'utiliser par la suite.

ATTENTION : l'énoncé du sujet contient 2 pages.

Exercice 1: On appelle Ψ une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ sur $]0,1[$.

On définit $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$ pour tout $x \in]0,1[$.

1. Justifier que φ est bien définie pour tout $x \in]0,1[$ et exprimer φ en fonction de Ψ.
2. Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et que $\varphi'(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ pour tout $x \in]0,1[$.
3. Montrer que $\forall x \in]0,1[\quad \varphi(x) \geq 0$.
4. Montrer que $\forall x \in]0,1[\quad \varphi(x) \leq \dfrac{x^2 - x}{\ln(x)}$.
5. En déduire que φ est prolongeable par continuité en 0 et donner $\varphi(0)$. Par abus de langage, on appelle désormais φ la fonction prolongée qui va de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$.
6. Montrer que φ est dérivable à droite en 0 et donner $\varphi'_d(0)$.

Exercice 2: On souhaite compter les écureuils sur le campus de Saint-Jérôme. On sait qu'il y a strictement plus de dix écureuils car il y a parmi eux une équipe de foot féminine (les *Noisettes de Provence*, quintuples championnes interuniversitaires de France).

On capture (sans leur faire mal) dix écureuils, et on leur met une petite marque sur la patte. Un mois plus tard, une fois par jour et pendant cinq jours de suite, on capture un écureuil, on regarde sa patte et on le relâche. On suppose que chaque “tirage” d'écureuil est uniforme parmi les écureuils et indépendant des précédents.

On note N le nombre d'écureuils. Soit, pour tout $i \in \{1, \cdots, 5\}$, X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ème écureuil a une marque, 0 sinon. Soit S la variable aléatoire qui compte, parmi les cinq écureuils capturés, combien ont une marque sur la patte.

1. Calculer, pour tout $i \in \{1, \cdots, 5\}$,
$$\mathbb{P}[X_i = 1].$$
2. Soit $j \in \{0, \cdots, 5\}$. Combien y a-t-il de 5-uplets $(x_1, \cdots, x_5) \in \{0,1\}^5$ tels que
$$card(\{i \in \{1, \cdots, 5\} \mid x_i = 1\}) = j \ ?$$
3. Soit $j \in \{0, \cdots, 5\}$. Démontrer que
$$\mathbb{P}[S = j] = \binom{5}{j} \left(\frac{10}{N}\right)^j \left(\frac{N-10}{N}\right)^{5-j}.$$

Soit $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Posons $k := 5 - j$.

4. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{x^5} (x - 10)^k .$$

Démontrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, dériver f, dresser le tableau de variations de f et démontrer que, sur $]10, +\infty[$, f admet un maximum en $\frac{50}{5-k}$. *Indication : ne pas essayer de trop développer.*

5. Dans cette dernière question, on suppose que, parmi les cinq écureuils capturés, deux avaient une marque sur la patte. On décide d'estimer le nombre d'écureuils en utilisant l'**estimateur du maximum de vraisemblance**, qui est un modèle qui prédit que le nombre N pour lequel la probabilité $\mathbb{P}[S = 2]$ est maximale.

   Selon ce modèle, combien y a-t-il d'écureuils à Saint-Jérôme ?

Fin du sujet