Examen

Lundi 14 janvier 2019

durée : 2h

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer sa dérivée.
2. Étudier la limite de f en 0.
3. Justifier que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement que l'on notera g.
4. Étudier la dérivabilité de la fonction g en 0.
5. Déterminer $I = g([0, +\infty[)$. Montrer que $g : [0, +\infty[\to I$ admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser les domaines de définition et d'arrivée de g^{-1}.
6. Calculer $g^{-1}(0)$. g^{-1} est-elle dérivable en 0 ? (Justifier votre réponse).
7. Calculer $g(1)$, puis déterminer la valeur de la dérivée de g^{-1} en $\frac{1}{e}$.

Exercice 2.

1. On considère l'intégrale
$$I = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx.$$
   (a) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{x}$, montrer que
$$I = 2\int_1^2 te^t dt.$$
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, en déduire la valeur de I.

2. Calculer l'intégrale suivante :
$$J = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{9x^2 - 6x + 2} dx.$$

3. (a) Montrer pour tout réel x la formule

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x).$$

(b) En déduire la valeur de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle suivante sur $I =]-1, +\infty[$:

$$(1+x)y'(x) + 2xy(x) = (1+x)^3. \qquad (E)$$

1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I$, $\dfrac{2x}{1+x} = a + \dfrac{b}{1+x}$.
2. Résoudre sur I l'équation homogène associée à (E).
3. Trouver une solution particulière f_p de l'équation (E) sur I (on pourra utiliser la méthode de variation de la constante).
4. Résoudre l'équation (E) sur I.
5. Parmi les solutions de (E), en existe-t-il vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$?

Exercice 4. On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \cos(x)e^x. \qquad (E)$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène associée à (E).
2. Chercher une solution particulière f_p de l'équation différentielle (E) sous la forme

$$f_p : x \mapsto Ae^x\cos(x), \text{ avec } A \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).
4. Existe-t-il une solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = y'(0) = 0$?