c) **Intégration d'un élément simple de 2nde espèce** $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\beta}$, **avec** $\beta \geqslant 2$

Il s'agit de calculer $F(x) = \displaystyle\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\beta}dx$, $B, C, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2-4c<0$, $\beta \in \mathbb{N}$ et $\beta \geqslant 2$. Ce calcul peut s'effectuer en quatre étapes que l'on va détailler sur l'exemple suivant :

$$\text{Calculer } F(x) = \int \frac{x+1}{(x^2-2x+3)^2}dx.$$

Étape 1 : On fait apparaître au numérateur $x+1$ la dérivée du polynôme du second degré du dénominateur x^2-2x+3 : on a $(x^2-2x+3)' = 2x-2$ et donc

$$x+1 = \frac{1}{2}(2x-2)+1+1 = \frac{1}{2}(2x-2)+2$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x^2-2x+3)^2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{(x^2-2x+3)^2}dx + 2\int \frac{1}{(x^2-2x+3)^2}dx \\ &= H(x)+G(x).\end{aligned}$$

$H(x)$ est de la forme $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx = \frac{1}{2}\times -\frac{1}{u(x)}$, avec $u(x) = x^2-2x+3$ donc $H(x) = -\dfrac{1}{2(x^2-2x+3)}$

Il reste alors à calculer $G(x)$.

Étape 2 : On décompose le polynôme au dénominateur x^2-2x+3 en somme d'un carré et d'un reste :

$x^2-2x+3 = (x-1)^2-1+3 = (x-1)^2+2$ en posant $t = x-1$, on a $x^2-2x+3 = t^2+2$

$$dt = dx \text{ donc } G(x) = 2\int \frac{1}{(x^2-2x+3)^2}dx \text{ devient } 2\int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \phi(t).$$

Étape 3 : Calcul de $\phi(t)$: l'idée est d'écrire $(t^2+2)^2$ sous la forme « $c^2\left(\frac{t^2}{c}+1\right)^2$, » où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

$$\phi(t) = 2\int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = 2\int \frac{dt}{\left(2(\frac{t^2}{2}+1)\right)^2} = 2\int \frac{dt}{4\left(\frac{t^2}{2}+1\right)^2} = \int \frac{dt}{2\left(\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2}.$$

On pose alors $\tan(\theta) = t/\sqrt{2}$ donc $t = \sqrt{2}\tan(\theta)$, $dt = \sqrt{2}(1+\tan^2(\theta))d\theta$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int \frac{dt}{2\left((t/\sqrt{2})^2+1\right)^2} \\ &= \int \frac{\sqrt{2}(1+\tan^2(\theta))}{2(\tan^2(\theta)+1)^2}d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{1+\tan^2(\theta)}d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \cos^2(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\theta + \frac{\sqrt{2}}{8}\sin(2\theta)\end{aligned}$$

Étape 4 : On retourne à la variable de départ x pour le calcul de $G(x)$ et on regroupe avec la partie de $F(x)$ déjà calculée.
On a posé $t = \sqrt{2}\tan(\theta)$ ce qui donne $\tan(\theta) = \frac{t}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \arctan(t/\sqrt{2})$......

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{2\sin(\theta)\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \frac{2t/\sqrt{2}}{1+t^2/2} = \frac{2t}{\sqrt{2}\left(1+\frac{t^2}{2}\right)} = \frac{4t}{\sqrt{2}(2+t^2)}$$

donc

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(t/\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{8} \times \frac{4t}{\sqrt{2}(2+t^2)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(t/\sqrt{2}) + \frac{t}{2(2+t^2)}$$

On obtient finalement comme on a posé $t = x - 1$

$$G(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x-1}{2(2+(x-1)^2)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x-1}{2(x^2-2x+3)}$$

et donc

$$F(x) = H(x) + G(x) = \frac{-1}{2(x^2-2x+3)} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x-1}{2(x^2-2x+3)}$$

$$= \frac{x-2}{2(x^2-2x+3)} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)$$