

Site :  Luminy  St-Charles  St-Jérôme  Cht-Gombert  Aix-Montperrin  Aubagne-SATIS  
 Sujet de :  1<sup>er</sup> semestre  2<sup>ème</sup> semestre  Session 2      Durée de l'épreuve : 2h  
 Examen de : L1      Nom du diplôme : Licence mathématiques et informatique  
 Code du module : SMIU1      Libellé du module : Introduction à l'analyse  
 Calculatrices autorisées : NON      Documents autorisés : NON

---

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

**Exercice 1 (Logique, nombres réels)** \_\_\_\_\_

On considère l'énoncé (A) suivant :  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , si  $x > 0$  et  $y \geq 0$  alors  $\exists n \in \mathbb{N}$ ,  $nx \geq y$  (cet énoncé exprime une propriété caractéristique des nombres réels appelée *propriété d'Archimède*).

1. [0,5 pt] Donner la négation de (A).

On note  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des entiers naturels non nuls et  $\mathbb{R}_+$  l'ensemble des réels positifs ou nuls. On considère l'énoncé (B) suivant :  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ , si  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x < \frac{1}{n}$  alors  $x = 0$ .

2. [0.5 pt] Écrire la contraposée de (B).

3. [1 pt] En admettant que les nombres réels satisfont la propriété d'Archimède, démontrer (B).

**Exercice 2 (Fonctions)** \_\_\_\_\_

On considère la fonction  $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ .

1. [2 pt] Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, la dérivée et le tableau de variation de la fonction  $f$ .

2. [2 pt] Calculer l'image directe de  $] -1, 0[$  et l'image réciproque de  $[\sqrt{2}, +\infty[$  par  $f$ .

3. [2 pt] Donner deux intervalles  $I_1$  et  $I_2$  vérifiant les deux conditions suivantes :  
 — la fonction  $f$  est injective sur chacun des intervalles  $I_1$  et  $I_2$  ;  
 — la réunion de  $I_1$  et  $I_2$  est égale au domaine de définition de  $f$ .

**Exercice 3 (Intégrales)** \_\_\_\_\_

Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

1. [1 pt]  $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ .

2. [2 pt]  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$  (on pourra faire le changement de variable  $x = \sin t$ ).

3. [2 pt]  $\int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx$  (faire une intégration par parties).

**Exercice 4 (Équations différentielles)** \_\_\_\_\_

Dans cet exercice toutes les fonctions considérées sont supposées définies sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

1. [1 pt] Trouver une primitive de la fonction  $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$ .

2. [1 pt] Résoudre l'équation différentielle homogène  $y'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y(x) = 0$ .

3. [2 pt] Par la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière à l'équation  $y'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y(x) = 1$ .

4. [0,5 pt] En déduire toutes les solutions de l'équation  $y'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y(x) = 1$ .

**Exercice 5 (Équations différentielles du second ordre)** \_\_\_\_\_

[3 pt] Résoudre l'équation différentielle suivante :  $y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + x + 1$ .