



Site : Luminy St-Charles St-Jérôme Cht-Gombert Aix-Montperrin Aubagne-SATIS
Sujet de : 1^{er} semestre 2^{ème} semestre Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence mathématiques et informatique
Code du module : SMIU1 Libellé du module : Introduction à l'analyse
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. Sujet sur 2 pages !

Exercice 1 _____

On considère l'application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = 2x^2 - x$.

- Déterminer $h^{-1}(0)$.
- Montrer que $h(x) > -3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- En déduire que h n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 2 _____

Soient

$$A = \{x \in \mathbb{R}, |x + 1| \leq x^2 - 1\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R}, 2|x + 3| > |x - 7|\}.$$

Exprimer les ensembles A , B , $A \cup B$ et $A \cap B$ comme réunions d'intervalles.

Exercice 3 _____

- Donner les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction $f(x) = \ln(1 + x^2) \cdot \cos(2x)$ et calculer sa dérivée.
- Donner les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction $g(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 4 _____

- Donner le domaine de définition de la fonction $h(x) = \sin(x) \cdot \ln(\cos(x))$.
- Déterminer une primitive de h sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en faisant une intégration par parties.
- Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x) dx$.

Exercice 5 _____

- Calculer $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin(x) dx$.
- Calculer $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Exercice 6

- a) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = 2xy(x)$.
- b) Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'(x) = 2xy(x) + x$, $y(0) = 0$.