Journal de Mécanique
Vol. 20, N° 1, 1981.

Sur les équations de la plasticité : existence et régularité des solutions

par

Pierre-M. SUQUET*

RÉSUMÉ. — Nous abordons dans ce travail les problèmes d'évolution d'une classe de matériaux dissipatifs comprenant la Plasticité parfaite. Nous introduisons une classification de ces matériaux basée sur la régularité de leur potentiel de dissipation. Pour les matériaux à potentiel régulier l'existence de solutions continues en vitesse est montrée. Pour les matériaux à potentiel irrégulier un cadre cinématique correct, incluant d'éventuelles discontinuités de vitesse est présenté, et l'existence d'une solution est prouvée. La nature des discontinuités admissibles est discutée. Une nouvelle définition de la puissance dissipée dans un corps parfaitement plastique est proposée et comparée à d'autres définitions.

ABSTRACT. — This work deals with the evolution problems for a class of dissipative materials including the perfect Plasticity. We introduce a classification of these materials, based on the regularity of their potential of dissipation. In the case of a regular potential the existence of a continuous velocity solution is proved. In the case of an irregular potential a kinematical framework is proposed together with a new definition of the dissipation.

1. Résultats d'existence en Plasticité

1.1. INTRODUCTION

Depuis les premiers travaux de Coulomb (1773), les études sur la Plasticité ont connu d'importants développements. tant sur le plan de l'analyse physique du phénomène que de son analyse théorique. Il est maintenant bien connu que les déformations plastiques des matériaux sont provoquées de façon irréversible par les glissements relatifs de réseaux cristallins (à l'échelle microscopique). La modélisation de ces phénomènes a bénéficié des progrès de la thermodynamique des processus irréversibles, et une utilisation intensive de l'inégalité de Clausius Duhem a permis de définir de nouvelles classes de matériaux dissipatifs (*voir* [1]).

* Laboratoire Mécanique Théorique, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

La non-linéarité des lois envisagées rend difficile la recherche de solutions analytiques pour les problèmes aux limites. En ce qui concerne *l'analyse limite* on dispose dans un certain nombre de situations classiques (poinçonnement, extrusion, torsion...) de solutions explicites complètes. La méthode des lignes de glissement (*cf.* tous les ouvrages classiques de Plasticité) montre ici toute son efficacité. Par contre en ce qui concerne l'*évolution* des structures élastoplastiques les méthodes analytiques sont difficiles à mettre en œuvre.

Le développement de gros moyens de calcul a permis d'abandonner la recherche de solutions exactes, et de se tourner vers des caractérisations plus globales de ces solutions. C'est en partie dans ce sens que doit être compris le développement systématique des principes variationnels entrepris dès cette époque (Prager Hodge [3], Greenberg [4], article de synthèse de Koiter [5]).

Dans une première étape ces principes variationnels ont été des principes en vitesse : en supposant connu à un instant donné l'état de contrainte et de déformation on est en mesure de déterminer dans le cas général la vitesse des tenseurs de contrainte et de déformation à cet instant. Par exemple :

PRINCIPE DE HODGE PRAGER ([6], p. 242). — *Parmi tous les champs de vitesse de contraintes $\dot{\sigma}^*$ statiquement et plastiquement admissibles, le champ réel minimise l'expression :*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega A_{ijkh}(x)\,\dot{\sigma}^*_{ij}\,\dot{\sigma}^*_{kh}\,dx-\int_{\partial\Omega_U}\dot{\sigma}^*_{ij}\,V^d_i\,n_j\,ds, \tag{1}$$

(les coefficients A_{ijkh} forment la matrice de compliance du matériau, $\partial\Omega$ est la partie de la frontière sur laquelle la vitesse V^d est imposée.)

PRINCIPE DE GREENBERG [4]. — *Parmi tous les champs de vitesse v^* cinématiquement admissibles, le champ réel minimise l'expression :*

$$\left\{\operatorname*{Sup}_{\dot{\sigma}^*\in \text{P.A.}}\int_\Omega\left[\dot{\sigma}^*_{ij}\,\varepsilon_{ij}(v^*)\,dx-\frac{1}{2}A_{ijkh}\,\dot{\sigma}^*_{kh}\,\dot{\sigma}^*_{ij}\right]dx\right\} -\int_\Omega f_i\,v^*_i\,dx-\int_{\partial\Omega_F}F^d_i\,v^*_i\,ds, \tag{2}$$

(où P.A. est l'ensemble des vitesses de contrainte plastiquement admissibles.)

Il semble alors facile une fois connue la vitesse $\dot{\sigma}(t)$ de déduire de (1) l'évolution du tenseur de contrainte σ par un schéma pas à pas dans le temps :

$$\sigma(t+\delta t)=\sigma(t)+\delta t\,\dot{\sigma}(t).$$

Bien que bon nombre de méthodes numériques soient basées sur cette remarque, il est apparu que cet algorithme donne des résultats variables, car il n'assure pas l'appartenance de $\sigma(t+\delta t)$ au domaine d'élasticité. Il a alors fallu envisager le problème de façon encore plus globale et chercher l'évolution complète des tenseurs de contrainte et de déformation.

Cette analyse plus poussée a beaucoup bénéficié des développements récents de l'Analyse Convexe, outil mathématique très bien adapté aux formulations en termes d'énergie ou de puissance des problèmes de Mécanique. Il semble même que les études sur la Plasticité aient provoqué bon nombre de progrès dans cette discipline, l'exemple le plus frappant de ce parallélisme étant les travaux de J. J. Moreau dont le nom reste attaché aux études de fond tant en Analyse Convexe [7] qu'en Plasticité [8].

Les études récentes sur le problème global d'évolution se répartissent entre deux méthodes complémentaires. La première méthode, centrée sur le processus de rafle par un convexe variable de Moreau [9], a été utilisée par Nayroles [10] et Debordes [11]. On retiendra, entre autres choses, des travaux de ces auteurs, l'importance de la dualité en Mécanique, et la difficulté de réaliser cette dualité en Plasticité parfaite. La seconde méthode, proche des méthodes constructives en équations aux dérivées partielles, trouve sa source dans le livre Duvaut-Lions [12]; elle a été développée par Johnson [13], Mercier [14] et d'autres. Entre ces deux courants, se rangent les travaux sur les matériaux écrouissables ([1], [15]) et les travaux de l'école italienne.

Si l'ensemble de ces travaux résoud de façon très satisfaisante le problème d'évolution pour le tenseur de contrainte, il laisse largement ouvert le problème d'évolution pour le tenseur vitesse de déformation. La difficulté de ce problème réside dans l'absence jusqu'à une date récente d'un cadre fonctionnel correct pour les champs cinématiquement admissibles. Cette lacune a été récemment comblée ([16], [17]) et le cadre proposé est :

$$\mathrm{BD}(\Omega)=\{\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}=(v_i);\ v_i\in L^1(\Omega);\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\in M^1(\Omega)\},$$

où $M^1(\Omega)$ est l'espace des mesures bornées sur Ω.

Sans entrer dans des détails trop techniques (pour lesquels nous renvoyons de [16] à [19]) il est facile de se convaincre que l'introduction de cet espace est une conséquence du principe de Greenberg (2) : il est intuitif que le bon cadre cinématique est le plus gros espace qui donne un sens à la fonctionnelle (2); on obtient ainsi $\mathrm{BD}(\Omega)$.

$\mathrm{BD}(\Omega)$ est un être mathématique intéressant en soi, ce qui a justifié plusieurs études ([20], [21], [22]) dont les résultats essentiels sont rappelés en

annexe. On remarque que les travaux rendus possibles par l'introduction de cet espace ont à nouveau la double motivation qui caractérisaient les travaux précédents ([8], [12]) sur ce sujet :

(*a*) en Analyse Convexe : travaux sur la dualité dans des espaces non réflexifs débouchant sur des résultats en analyse limite et en élasticité non linéaire : Strang Temam [24], Christiansen [23];

(*b*) en Plasticité incrémentale : travaux sur le problème d'évolution de la déformation dans une transformation quasi-statique : Matthies [36], Debordes [37], et l'auteur ([17], [18], [19]).

Objet du présent travail :

Nous proposons ici une méthode de résolution pour la détermination du champ de vitesse et du champ de déformation dans un solide élastique parfaitement plastique en petites déformations, problème laissé ouvert par les auteurs précédents. La régularité du champ de vitesse ainsi obtenue sera discutée. Au passage on étudiera une classe assez large de matériaux dissipatifs, utilisés couramment pour approcher le matériau parfaitement plastique.

Plus précisément la loi de comportement de ces matériaux est la suivante : la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ est la somme d'une partie élastique et d'une partie anélastique :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))=\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x})+\boldsymbol{\varepsilon}^{an}(\mathbf{x}).$$

La partie élastique de la déformation est une fonction linéaire du tenseur de contrainte :

$$\varepsilon^e_{ij}(\mathbf{x}, t)=\mathrm{A}_{ijkh}(\mathbf{x}, t)\,\sigma_{kh}(\mathbf{x}, t).$$

Pour définir la loi régissant ε^{an}, nous ferons l'hypothèse de dissipativité normale sous une forme due à J. J. Moreau [8] :

HYPOTHÈSE 1. — *Il existe une fonction* φ *convexe, minimum en* 0 *et telle que :*

$$\text{(H1)} \qquad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{an}(\mathbf{x}, t)\in\partial\varphi(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)),$$

φ *est le pseudo-potentiel local de force du matériau.*

$\partial\varphi$ est le sous différentiel de φ (*cf.* [7], [25]). La conjuguée φ^* de φ est le pseudo-potentiel local de dissipation et satisfait :

$$\boldsymbol{\sigma}\in\partial\varphi^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{an}).$$

La loi de comportement globale s'écrit alors (sous forme abrégée) (1) :

$$\text{(3)} \qquad \frac{d}{dt}(\mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma})+\partial\varphi(\boldsymbol{\sigma})=\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right), \quad \text{p.p. } x\in\Omega.$$

Nous allons voir que sous certaines hypothèses de régularité sur φ, les solutions $d\mathbf{u}/dt$ (vitesse de déplacement) de (3) accompagné des lois de conservation, sont continues à la traversée de toute surface. Au contraire, dans le cas de la Plasticité parfaite où le potentiel φ n'est pas régulier, les solutions $d\mathbf{u}/dt$ de (3) peuvent présenter des discontinuités. Un cadre mathématique convenable pour ce phénomène sera présenté. L'existence de ces solutions discontinues sera prouvée en approchant le problème « irrégulier » par un problème régulier et en montrant que la déformation anélastique « régulière » se concentre dans de minces bandes lorsque le paramètre de régularisation tend vers zéro. Cette méthode est analogue à la méthode de Lax pour la mise en évidence de solutions avec chocs dans les systèmes régis par une ou plusieurs équations hyperboliques non linéaires. Par ce procédé nous retrouverons une situation déjà connue et étudiée (dans un contexte un peu moins général) dans la littérature classique : l'apparition de discontinuités en Plasticité parfaite.

1.2. EXEMPLES ET NOTATIONS

(*a*) *Exemples*

(i) *La Plasticité parfaite.*

$\mathrm{P}(x, t)$ désigne le domaine d'élasticité, dans lequel le tenseur des contraintes est astreint à demeurer. C'est un convexe fermé de $\mathbb{R}^9_s$ (espace des tenseurs 3×3 symétriques). Le potentiel local φ est défini par :

$$\text{(4)} \qquad \varphi(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\tau})=\begin{cases}0, & \text{si } \boldsymbol{\tau}\in\mathrm{P}(\mathbf{x}, t),\\ +\infty, & \text{sinon.}\end{cases}$$

L'hypothèse (H1) est équivalente au principe du travail maximal de Hill; on a :

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\in\mathrm{P}(\mathbf{x}, t),\\ (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{an}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t))\leqq 0, \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau}\in\mathrm{P}(\mathbf{x}, t).\end{cases}$$

(1) Nous utiliserons indifféremment les notations $\dot{f}$ ou $\partial f/\partial t$.

Le produit scalaire (,) est celui de $\mathbb{R}^9$ [tenseurs (3,3)] (3) devient alors (en abrégé) :

$$(6)\qquad \begin{cases} \sigma \in P, \\ \left(\dfrac{d}{dt}(A\sigma), \tau-\sigma\right) \geqq \left(\varepsilon\left(\dfrac{du}{dt}\right), \tau-\sigma\right), \qquad \forall \tau \in P. \end{cases}$$

La loi (6) est connue sous le nom de loi d'écoulement de Prandtl-Reuss.

Le cas le plus fréquent est celui où $P(x, t)$ est défini par une ou plusieurs inéquations :

$$\mathscr{F}_i(\tau) \leqq k_i(x, t),$$

(5) n'est autre dans ce cas là que la loi d'écoulement en plasticité à potentiels multiples :

$$\dot{\varepsilon}^{an}(x, t) = \lambda_i(x, t)\frac{\partial \mathscr{F}_i}{\partial \sigma}(\sigma(x, t)),$$

où les λ_i sont des multiplicateurs positifs et inconnus.

(ii) *Viscoplasticité I.*

Un cas particulier important de viscoplasticité est la loi de Perzyna, qui est, sur le plan mathématique, une régularisation Yosida de la loi (5) :

$$\varphi_\mu(x, t, \tau) = \frac{1}{2\mu(x, t)}\|\tau - \pi_{P(x,t)}\tau\|^2,$$

π_p, $\|.\|$ désignent la projection sur P dans $\mathbb{R}^9_s$ et la norme de cet espace. μ est la viscosité qui est uniformément minorée :

$$0 < \mu_0 \leqq \mu(x, t).$$

L'hypothèse (H1) devient alors :

$$(7)\qquad \dot{\varepsilon}^{an}(x, t) = \frac{1}{\mu(x, t)}(\sigma(x, t) - \pi_{P(x,t)}\sigma(x, t)),$$

et la loi (3) donne :

$$(8)\qquad \frac{d}{dt}(A\sigma) + \frac{1}{\mu}(\sigma - \pi_p\sigma) = \varepsilon\left(\frac{du}{dt}\right).$$

Remarquons que lorsque μ tend vers zéro dans (8), on retrouve *formellement* la loi (6).

(iii) *Viscoplasticité II. Viscoélasticité*

Un cas particulier important de viscoplasticité est le matériau dit de Norton-Hoff (ou Norton-Osgood) que nous présenterons en suivant l'exposé de Friaa [26] :

Soit j la fonction de jauge de $P(x, t)$:

$$j(x, t, \tau) = \operatorname{Inf}\{k \geqq 0;\ \tau \in k P(x, t)\},$$

j est une fonction convexe s.c.i. positivement homogène de degré 1.

On pose :

$$\varphi_n(x, t, \tau) = (j(x, t, \tau))^n/n.$$

Alors (H1) devient :

$$\dot{\varepsilon}^{an}(x, t) = \frac{\partial j}{\partial \sigma}(x, t, \sigma(x, t))(j(x, t, \sigma(x, t)))^{n-1},$$

et la loi (3) donne :

$$(9)\qquad \frac{d}{dt}(A\sigma) + \frac{\partial j}{\partial \sigma}(j(\sigma))^{n-1} = \varepsilon\left(\frac{du}{dt}\right).$$

Remarquons que, lorsque n tend vers $+\infty$ dans (9), on retrouve *formellement* la loi (6). Pour $n=2$ on retrouve une loi viscoélastique, de type Maxwell.

Il est possible de construire également des matériaux de Norton-Hoff à seuil. Si $\langle f \rangle$ désigne la fonction Sup $(0, f)$, on pose :

$$\tilde{\varphi}_n(x, t, \tau) = \frac{1}{n}\langle j(x, t, \tau) - 1 \rangle^n,$$

(H1) devient alors :

$$(10)\qquad \dot{\varepsilon}^{an} = \frac{\partial j}{\partial \sigma}(\sigma)\frac{\langle j(\sigma) - 1 \rangle}{(j(\sigma) - 1)}(j(\sigma))^{n-1}.$$

On peut faire tendre à nouveau n vers $+\infty$ dans (10) et obtenir ainsi *de façon formelle* la loi (6).

On trouvera sur la figure 1 les graphes des potentiels précédents :

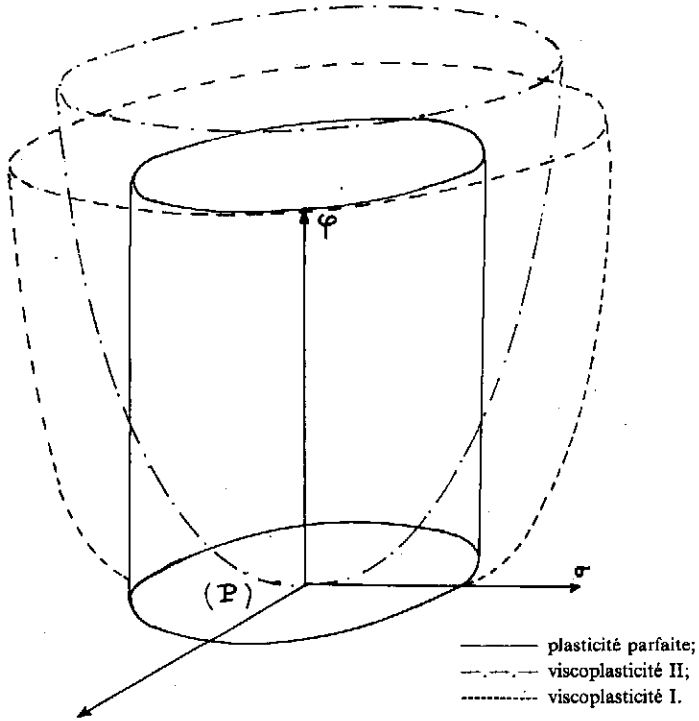


Fig. 1

Remarque 1. — Dans certains cas il est nécessaire d'ajouter à la variable σ des variables forces thermodynamiques généralisées $\mathbf{A}$. L'hypothèse (H1) formulée en remplaçant σ par le couple $(\sigma, \mathbf{A})$ et $\dot{\varepsilon}^{an}$ par $(\dot{\varepsilon}^{an}, -\dot{\alpha})$ (les α sont des paramètres internes) est à la base de la théorie des matériaux standard généralisés ([1], [25]). On peut alors développer, moyennant quelques hypothèses de convexité, une théorie analogue à celle qui va être présentée ici.

Remarque 2. — La dépendance en x des propriétés élastiques (A_{ijkh}) ou anélastiques (φ) du matériau indique une non homogénéité possible. La dépendance en t de ces mêmes propriétés peut par exemple modéliser des effets thermiques : (A_{ijkh}) et φ sont alors des fonctions connues de la température T, cette dernière étant une fonction connue du temps t.

Remarque 3. — Certains auteurs préfèrent remplacer l'hypothèse (H1) par la suivante :

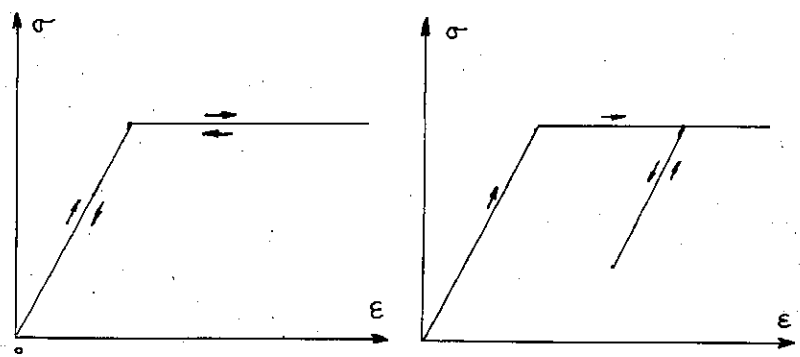
HYPOTHÈSE 2. — *Il existe une fonction* Ψ, *convexe s.c.i. telle que :*

(H2) $$\varepsilon^{an}(\mathbf{x}, t) \in \partial\Psi(\mathbf{x}, t, \sigma(\mathbf{x}, t)).$$

La loi de comportement totale est alors :

(11) $$\mathbf{A}\sigma + \partial\Psi(\sigma) = \varepsilon(\mathbf{u}).$$

Lorsque Ψ est égal au potentiel (4) de la Plasticité parfaite, on retrouve la loi dite « déformation totale » ou de Hencky Nadaï [27]. Cette loi *n'est pas physiquement acceptable*, sauf pour des trajets de charge très particuliers. En effet, il est clair que la loi incrémentale (6) prend en compte l'histoire du matériau, propriété indispensable pour obtenir des déformations permanentes après décharge. Au contraire, la loi (11) ne tient pas compte de l'histoire du matériau et associe à une valeur de la charge, une valeur *unique* du tenseur des contraintes indépendante du fait que l'on est en charge ou en décharge. La loi (11) doit plutôt être classée dans les lois élastiques à énergie de déformation non quadratique.



Charge décharge en loi de Hencky.

Charge décharge en loi de Prandtl-Reuss.

Fig. 2

Il faut cependant remarquer que (6) et (11) conduisent aux mêmes difficultés mathématiques, ce qui justifie le choix de (11) dans certains travaux mathématiques ([14], [24], [41]).

(*b*) *Les autres données du problème.*

Nous nous plaçons dans l'hypothèse de transformations infinitésimales. Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + f_i, \tag{12}$$

$\mathbf{f} = (f_i)$ est une densité volumique de forces.

Le problème quasi-statique associé au problème dynamique (12) s'obtient en négligeant les termes d'inertie :

$$0 = \sigma_{ij,j} + f_i. \tag{13}$$

Le corps occupe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ (²), et est astreint sur son bord $\partial\Omega$ à des conditions aux limites de type classique : $\partial\Omega_U$, $\partial\Omega_F$ forment une partition de $\partial\Omega$, sur lesquelles on impose respectivement les déplacements et la contrainte :

$$u_i(x, t) = U_i^d(x, t), \quad \text{sur } \partial\Omega_U, \quad i = 1, 2, 3, \tag{14}$$

$$\sigma_{ij} n_j(x, t) = F_i^d(x, t), \quad \text{sur } \partial\Omega_F, \quad i = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Il est possible d'envisager d'autres conditions aux limites : dans beaucoup de problèmes, la composante normale du déplacement, et les composantes tangentielles de la contrainte sont données. Ce qui suit s'adapte au prix de modifications mineures.

Conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}); \qquad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \\ \boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathrm{P}(0); \qquad (\boldsymbol{\sigma}_0)_{ij,j} + f_i(0) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \qquad (\mathbf{u}_0)_i = U_i^d(\mathbf{x}, 0) \quad \text{sur } \partial\Omega_U; \\ \qquad (\boldsymbol{\sigma}_0)_{ij} n_j = F_i^d(0) \quad \text{sur } \partial\Omega_F. \end{array}\right. \tag{16}$$

Pour le problème dynamique une condition supplémentaire est donnée :

$$\dot{\mathbf{u}}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x).$$

(*c*) Notations. Hypothèses. — Nous utiliserons les espaces $L^p(\Omega)$, $H^s(\Omega)$, $W^{s,p}(\Omega)$ définis dans [28];

(²) Les raisonnements sont inchangés dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

si Z est un espace vectoriel de tenseurs, nous noterons Z_s le sous espace de Z formé de tenseurs symétriques :

$$\mathrm{H} = (L^2(\Omega))_s^9 = \{\boldsymbol{\tau} \mid \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij});\ \tau_{ij} = \tau_{ji};\ \tau_{ij} \in L^2(\Omega)\},$$

H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \tau_{ij}(\mathbf{x})\, dx. \tag{17}$$

La norme de H sera notée $|.|$.

Un champ de tenseurs élément de H sera noté $\boldsymbol{\tau}$, sa valeur en un point x de Ω sera notée $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = (\tau_{ij}(\mathbf{x}))$.

On définit sur H un opérateur $\mathbf{A}(t)$ en posant :

$$(\mathbf{A}(t)\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega \mathrm{A}_{ijkh}(\mathbf{x}, t)\, \sigma_{kh}(\mathbf{x}) \tau_{ij}(\mathbf{x})\, dx.$$

Avec les hypothèses usuelles de symétrie et de positivité sur les coefficients A_{ijkh}, l'opérateur $\mathbf{A}(t)$ est auto-adjoint, continu et coercif dans H; c'est-à-dire quel que soit $\sigma \in \mathrm{H}$, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$(\mathbf{A}(t)\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geqq \alpha |\boldsymbol{\sigma}|^2, \tag{18}$$

$$\left| \frac{\partial^j \mathbf{A}}{\partial t^j}(t)\boldsymbol{\sigma} \right| \leqq \beta |\boldsymbol{\sigma}|, \qquad j = 0, 1, 2. \tag{19}$$

On suppose que α et β sont des constantes indépendantes du temps. On pose :

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\tau} = (\tau_{1j,j}, \tau_{2j,j}, \tau_{3j,j}),$$

D est parfois appelé opérateur d'équilibre :

$$\mathscr{H}_{ad}(t) = \{\boldsymbol{\tau} \mid \boldsymbol{\tau} \in \mathrm{H};\ \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} \in (L^3(\Omega))^3;\ \tau_{ij} n_j = F_i^d \text{ sur } \partial\Omega_F\},$$

$$\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_{ad}(t) - \mathscr{H}_{ad}(t),$$

$\mathrm{V} = (L^2(\Omega))^3$. Muni du produit scalaire :

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Omega v_i(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

V est un espace de Hilbert dont la norme est notée $|.|$ (que l'on prendra garde de ne pas confondre avec la norme de H).

1.3. POTENTIELS RÉGULIERS. POTENTIELS IRRÉGULIERS

(*a*) *Potentiels réguliers.*

A partir du potentiel local φ nous définissons un potentiel global Φ en posant :

$$\Phi(t, \tau) = \int_\Omega \varphi(\mathbf{x}, t, \tau(\mathbf{x}))\, dx.$$

Nous noterons X le domaine de Φ dans H, et nous dirons que Φ est un *potentiel régulier* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(20) X est un sous-espace vectoriel de H, qui muni d'une norme convenable $\|\,.\,\|_X$, est un espace de Banach réflexif contenant un espace du type $(L^p(\Omega))^9_s$, avec p inférieur à $+\infty$. L'injection de X dans H est continue.

On note X′ le dual de X pour la forme bilinéaire (17) et on suppose que le sous-différentiel $\partial\Phi$ de X dans X′ du potentiel global, coïncide avec le sous-différentiel du potentiel local :

$$\partial\Phi(t, \sigma)(\mathbf{x}) = \partial\varphi(\mathbf{x}, t, \sigma(\mathbf{x})), \quad \text{p. p. } \mathbf{x} \in \Omega. \tag{21}$$

On demande de plus que $\partial\Phi$ soit un opérateur continu de X dans X′ :

$$\|\partial\Phi(t, \tau) - \partial\Phi(t, \sigma)\|_{X'} \leqq L(\|\tau - \sigma\|_X), \tag{22}$$

où L est une fonction numérique continue en 0 et indépendante du temps t. On suppose que les ensembles :

$$\{\tau \mid \tau \in X;\ |\tau|_H \leqq C \text{ et } \Phi(t, \tau) \leqq C\}, \tag{23}$$

(où C est une constante) sont des bornés de X.

Enfin, on suppose que $\Phi(t, \sigma)$ et $\partial\Phi(t, \sigma)$ sont des fonctions régulières du temps : il existe des constantes C_1 et C_2 telles que :

$$\begin{aligned} &\|\partial\Phi(t, \sigma) - \partial\Phi(s, \sigma)\|_{X'} \\ &\qquad + |\Phi(t, \sigma) - \Phi(s, \sigma)| \leqq C_1 |t - s| (\Phi(s, \sigma) + C_2), \end{aligned} \tag{24}$$

Commentaires.

L'hypothèse (22) est une condition de différentiabilité qui peut être affaiblie. L'hypothèse (23) est une condition de coercivité; nous l'utiliserons de la façon suivante : soit σ_n une suite d'éléments de X bornée dans H et telle que $\Phi(t, \sigma_n)$ est bornée, alors σ_n est bornée dans X.

Les conditions de régularité ci-dessus sont satisfaites dans les exemples (ii) et (iii) donnés plus haut.

Loi viscoplastique de Perzyna.

Dans ce cas, X = H et les hypothèses (20) et (23) sont automatiquement satisfaites. Pour discuter les autres conditions, nous allons particulariser le convexe $P(\mathbf{x}, t)$ en choisissant un seuil de Mises :

$$P(\mathbf{x}, t) = \{\tau \mid \sqrt{\tau^D_{ij}\tau^D_{ij}} \leqq k(\mathbf{x}, t)\}, \tag{25}$$

avec :

$$k_0 \leqq k(\mathbf{x}, t) \leqq k_1. \tag{26}$$

Alors :

$$\partial\varphi(\mathbf{x}, t, \sigma) = \frac{1}{\mu(\mathbf{x}, t)} \sigma^D(\mathbf{x}, t) \left\langle \frac{\sqrt{\sigma^D(\mathbf{x}, t)\sigma^D(\mathbf{x}, t)}}{k(\mathbf{x}, t)} - 1 \right\rangle,$$

et l'hypothèse (21) est vérifiée dès que les fonctions $k(x, t)$ et $\mu(x, t)$ sont constantes (ou régulières) sur des sous-ensembles mesurables de Ω (ce qui est le cas dans la pratique).

L'hypothèse (22) est toujours satisfaite, car :

$$|\partial\Phi(t, \sigma) - \partial\Phi(t, \tau)| \leqq \frac{2}{\mu_0} |\sigma - \tau|,$$

(24) est assurée dès que μ et k sont des fonctions lipschitziennes de t.

Loi viscoplastique de Norton-Hoff.

On conserve le convexe de von Mises (2.22). Alors :

$$\varphi_n(\mathbf{x}, t, \tau) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sqrt{\tau^D(\mathbf{x}, t)\tau^D(\mathbf{x}, t)}}{k(\mathbf{x}, t)} \right)^n,$$

$$X = \{\tau \mid \tau \in H;\ \tau^D \in (L^n(\Omega))^9_s\},$$

$$\|\tau\|_X = |\tau|_H + \|\tau^D\|_{(L^n(\Omega))^9_s},$$

X contient $(L^n(\Omega))^9_s$ et l'hypothèse (20) est satisfaite :

$$X' = \{\mathbf{e} \mid \mathbf{e} = (e_{ij});\ \mathbf{e}^D \in (L^{n/(n-1)}(\Omega))^9_s;\ \operatorname{Tr}(\mathbf{e}) \in L^2(\Omega)\},$$

(26) étant supposée satisfaite et la fonction $1/k$ étant supposée mesurable, des inégalités de convexité classiques montrent que :

$$C_1 \| \tau^D \|_{(L^2(\Omega))^9_s} \leqq \Phi_n(t, \tau) \leqq C_2 \| \tau^D \|_{(L^2(\Omega))^9_s},$$

et l'hypothèse (23) est satisfaite. Il est également facile de voir que sous les mêmes hypothèses sur $k(\mathbf{x}, t)$ que précédemment les conditions (21) (22) et (24) sont vérifiées.

(*b*) *Potentiels irréguliers.*

Nous dirons au contraire qu'un potentiel est *irrégulier* s'il ne vérifie pas l'une des conditions de différentiabilité (22) ou de coercivité (23) ci-dessus. Le seul potentiel irrégulier envisagé ici sera celui de la Plasticité parfaite (4). On pose :

$$P(t) = \{ \tau \mid \tau \in H;\ \tau(\mathbf{x}, t) \in P(\mathbf{x}, t),\ \text{p. p. } \mathbf{x} \in \Omega \}.$$

Certains potentiels réguliers sont considérés comme des approximations régularisantes du potentiel (4) au sens suivant : une suite Φ^n de potentiels réguliers tend vers le potentiel (4) si :

$$\limsup_{n \to +\infty} \Phi^n(t, \tau) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \tau \in P(t), \tag{27}$$

$$(\forall \tau \in P(t)), \quad \lim_{n \to +\infty} \Phi^n(t, \tau) = 0. \tag{28}$$

On suppose de plus que la formule de Green suivante (principe des travaux virtuels) est satisfaite quel que soit $\mathbf{v}$ de $\mathscr{U}_0^n$ et quel que soit τ de $\mathscr{H}_0 \cap X_n$:

$$\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{v}) \tau \, dx + \int_\Omega \mathbf{v} \, \mathbf{D}\tau \, dx = 0,$$

X_n est le domaine de Φ^n et $\mathscr{U}_0^n$ est l'espace suivant :

$$\mathscr{U}_0^n = \{ \mathbf{v} \mid v_i \in L^n(\Omega);\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \in X_n';\ v_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega_U \}.$$

On peut aisément vérifier que les potentiels viscoplastiques de Perzyna et de Norton-Hoff sont des approximations régularisantes de (4).

Cadre cinématique.

Il est clair que la variable cinématique privilégiée par (3) est $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$. Lorsque la régularité (en temps) de $\mathbf{v}$ le permettra, $\mathbf{u}$ s'en déduira par intégration.

Pour les potentiels réguliers le cadre cinématique est :

$$\mathscr{V}_{ad}(t) = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in (L^1(\Omega))^3,\ \varepsilon(\mathbf{v}) \in X',\ v_i = \dot{U}_i^d \text{ sur } \partial\Omega_U \}. \tag{29}$$

On remarque qu'en vertu de l'hypothèse (20), $\mathscr{V}_{ad}$ est inclus dans un espace du type $(W^{1,p'}(\Omega))^3$. Par conséquent les conditions aux limites dans (29) ont un sens et les éléments de $\mathscr{V}_{ad}$ sont continus à la traversée de toute surface incluse dans Ω.

Pour la Plasticité parfaite le cadre cinématique est :

$$BD(\Omega) = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = (v_i),\ v_i \in L^1(\Omega),\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \in M^1(\Omega),\ 1 \leqq i, j \leqq 3 \},$$

(champs à « déformation bornée »), $M^1(\Omega)$ est l'espace des mesures bornées sur Ω [29].

REMARQUE 4. — Un théorème de trace ([20], [21]) assure que : *tout élément de* BD (Ω) *admet une trace dans* $(L^1(\partial\Omega))^3$ *sur le bord de* Ω. *Sur toute surface (localement orientable) contenue dans* Ω, *tout élément* $\mathbf{u}$ *de* BD (Ω) *admet une trace externe* $\mathbf{u}^+$ *et une trace interne* $\mathbf{u}^-$, *qui peuvent être différentes. Les éléments de* BD (Ω) *peuvent donc présenter des surfaces de discontinuité.*

1.4. FORMULATIONS. RÉSULTATS

(*a*) *Formulations.*

Dans le cas d'un potentiel régulier, il sera possible de résoudre les formulations fortes des problèmes dynamique et quasi statique.

PROBLÈME DYNAMIQUE (formulation forte).

Trouver $(\sigma, \mathbf{v}) : [0, T] \to (\mathscr{H}_{ad}(t) \cap X) \times \mathscr{V}_{ad}(t)$ *tels que :*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\sigma) + \partial\Phi(t, \sigma) = \varepsilon(\mathbf{v}), \\[2ex] \rho \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{D}\sigma = \mathbf{f}, \end{cases} \tag{30}$$

$$\sigma(0) = \sigma_0, \qquad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \tag{31}$$

PROBLÈME QUASI STATIQUE (formulation forte).

Trouver $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) : [0, T] \to (\mathscr{H}_{ad}(t) \cap X) \times \mathscr{V}_{ad}(t)$ *tels que :*

$$(32) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}) + \partial\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \\ -\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, \end{cases}$$

$$(33) \qquad \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0.$$

En ce qui concerne la Plasticité parfaite, nous ne pouvons pas espérer résoudre une formulation forte du type (32), (33), et ceci pour deux raisons :

(*a*) la (mauvaise) régularité du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ ne permet pas de définir une dualité $(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\sigma})$ suffisante pour donner un sens à une expression telle que (6);

(*b*) il est possible que les conditions aux limites ne soient pas satisfaites au sens de (14).

Pour ces deux raisons, nous proposons (en suivant Johnson [13]) une formulation faible du problème qui est obtenue à partir de la formulation forte par usage formel de la formule de Green :

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) + (\mathbf{v}, \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}) = \int_{\partial\Omega_U} \dot{U}_i^d (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) n_j \, d\gamma,$$

où $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont des éléments de $\mathscr{H}_{ad}(t)$.

Formulation faible du problème de l'évolution quasi statique d'un corps parfaitement plastique.

Trouver $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) : [0, T] \to [\mathscr{H}_{ad}(t) \cap P(t)] \times BD(\Omega)$ *tels que pour tout* $\boldsymbol{\tau}$ *de* $\mathscr{H}_{ad}(t) \cap P(t)$ *et pour tout* $\mathbf{w}$ *de* V, *on ait :*

$$(34) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}\right) + (\mathbf{v}, \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}) \geqq \displaystyle\int_{\partial\Omega_U} \dot{U}_i^d (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) n_j \, d\gamma, \\ (-\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}), \\ \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0. \end{cases}$$

4.2. HYPOTHÈSES. RÉSULTATS

HYPOTHÈSE 3. — *On suppose qu'il existe un champ de contraintes* $\boldsymbol{\chi}(t)$ *tel que :*

$$(H3) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\chi}(t) \in \mathscr{H}_{ad}(t), \quad (\forall t \in [0, T]), \\ \boldsymbol{\chi}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0, \\ -\mathbf{D}\boldsymbol{\chi}(t) = \mathbf{f}(t), \\ \boldsymbol{\chi} \in W^{1,\infty}(0, T; (L^\infty(\Omega))_s^9), \end{cases}$$

HYPOTHÈSE 4. — *On suppose qu'il existe un champ* $\mathbf{v}_1(t)$ *cinématiquement admissible tel que :*

$$(H4) \qquad \mathbf{v}_1 \in W^{1,\infty}(0, T; (H^1(\Omega))^3).$$

RÉSULTAT 1. — *Potentiels réguliers.*

Le problème quasi statique (30), (31) *admet une solution unique ayant la régularité suivante :*

$$\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; X), \qquad \mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathscr{V}).$$

Il en est de même pour le problème dynamique avec de plus :

$$d\mathbf{v}/dt \in L^2(0, T; V).$$

Pour résoudre le problème parfaitement plastique une hypothèse supplémentaire est nécessaire, qui assure que la charge limite n'a pas été dépassée :

HYPOTHÈSE 5. — *Il existe* $\delta > 0$ *tel que :*

$$(H5) \qquad \|\boldsymbol{\tau}\|_{(L^\infty(\Omega))_s^9} < \delta \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\chi}(t) + \boldsymbol{\tau} \in P(t), \qquad (\forall t \in [0, T]).$$

L'hypothèse (H5) assure que l'on se trouve strictement en dessous de la charge limite, dans une boule de sécurité.

On suppose de plus que 0 est à l'intérieur de $P(t)$; c'est-à-dire quel que soit t de $[0, T]$, il existe $\delta' > 0$ tel que :

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{(L^\infty(\Omega))_s^9} < \delta' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau} \in P(t).$$

RÉSULTAT 2. — *Le problème* (34) *de la Plasticité parfaite admet une solution* $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})$ *unique en* $\boldsymbol{\sigma}$, *ayant la régularité suivante :*

$$\boldsymbol{\sigma} \in L^\infty(0, T; H), \qquad \dot{\boldsymbol{\sigma}} \in L^2(0, T; H), \qquad \mathbf{v} \in L^2_w(0, T; BD(\Omega)).$$

De plus il existe une sous-suite des solutions régularisantes $(\boldsymbol{\sigma}^n, \mathbf{v}^n)$ *telle que :*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma}^n \text{ tend vers } \boldsymbol{\sigma} \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible } *, \\ &\dot{\boldsymbol{\sigma}}^n \text{ tend vers } \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{dans } L^2(0, T; H) \text{ faible}, \\ &\mathbf{v}^n \text{ tend vers } \mathbf{v} \quad \text{dans } L^2_w(0, T; BD(\Omega)) \text{ faible } *. \end{aligned}$$

[*Détail technique :* l'indice w de $L^2_w(0, T; BD(\Omega))$ indique que les éléments de cet espace sont seulement des fonctions scalairement mesurables du temps (*cf.* [30]). L'attention de l'auteur a été attirée sur la nécessité de ce point par O. Debordes.]

Schéma des démonstrations. — Nous ne donnerons pas la démonstration du cas dynamique renvoyant le lecteur intéressé à [19].

Problème quasi statique, potentiel régulier. — Dans le but de simplifier les notations nous supposerons ici A_{ijkh} et φ indépendants du temps. Il faut alors distinguer deux cas selon que l'hypothèse suivante est satisfaite ou non :

$$\varepsilon(\mathbf{u}_0)=\mathbf{A}\,\sigma_0. \tag{35}$$

Dans le cas où (35) est satisfaite le raisonnement de Duvaut-Lions [5] s'applique et la solution du problème quasi statique s'obtient comme limite des solutions du problème dynamique lorsque φ tend vers zéro (*voir* [19]. Ce passage à la limite peut paraître surprenant si on pense aux aspects fondamentalement différents des phénomènes dynamique et quasi statique : propagation d'ondes à une vitesse proportionnelle à $1/\sqrt{\rho}$ dans le premier cas, etc. Le caractère dissipatif du matériau n'est pas essentiel dans ce passage à la limite et le résultat reste vrai pour un corps élastique, la condition cruciale étant (35). L'exemple simple suivant est éclairant : les mouvements d'une masse m placée au bout d'un ressort de rigidité k et soumise à l'action d'une force extérieure régulière en temps F, sont régis par l'équation différentielle du second ordre :

$$\begin{cases} m\ddot{y}+ky=\mathrm{F}(t), \\ y(0)=y_0, \qquad \dot{y}(0)=\dot{y}_0, \end{cases} \tag{36}$$

dont la solution est :

$$\begin{aligned} y^m(t)=&(y_0-\mathrm{F}(0)/k)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \\ &+\sqrt{\frac{m}{k}}(\dot{y}_0-\dot{\mathrm{F}}(0)/k)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \\ &+\frac{1}{k}\mathrm{F}(t)-\frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^t \ddot{\mathrm{F}}(s)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-s)\right)ds. \end{aligned} \tag{37}$$

Il est clair qu'en général la solution dynamique ne tend pas vers la solution statique $\mathrm{F}(t)/k$ sauf si $y_0=\mathrm{F}(0)/k$. Il faut alors remarquer que la convergence de y^m vers $\mathrm{F}(t)/k$ a alors lieu quelle que soit la vitesse initiale $\dot{y}_0$.

Dans les cas (beaucoup plus courants) où (35) n'est pas satisfaite il faut procéder de la façon suivante.

Problème en contraintes.

On résoud tout d'abord le problème en contraintes. Soient χ et $\mathbf{v}^1$ deux champs respectivement statiquement et cinématiquement admissibles satisfaisant (H3) et (H4). On pose :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}=\sigma-\chi, \\ \mathrm{S}_0=\{\tau\,|\,\tau\in\mathrm{X};\ \mathbf{D}\,\tau=0\ \tau.\mathbf{n}=0 \text{ sur } \partial\Omega_{\mathrm{F}}\}. \end{cases} \tag{38}$$

Le problème en contraintes s'énonce :

Trouver $\bar{\sigma}$: $[0, \mathrm{T}]\to\mathrm{S}_0$ *tel que; quel que soit* τ *de* S_0 :

$$\left(\mathbf{A}\frac{d\bar{\sigma}}{dt}+\partial\Phi(\bar{\sigma}+\chi),\,\tau\right)=(\varepsilon(\mathbf{v}^1),\,\tau)-\left(\mathbf{A}\frac{d\chi}{dt},\,\tau\right),\quad \bar{\sigma}(0)=\mathbf{0}. \tag{39}$$

On résoud (39) par un schéma implicite : [0, T] est divisé en N intervalles élémentaires $[t_n, t_{n+1}[$ de longueur $\delta t=\mathrm{T}/\mathrm{N}$, $t_n=n\,\delta t$ [pour une fonction K nous noterons K_n pour $\mathrm{K}(t_n)$].

$\bar{\sigma}_0=0$ est donné. $\bar{\sigma}_n$ est défini par récurrence : il minimise sur S_0 la fonctionnelle semi-continue inférieurement (S_0 étant muni de la norme de X) convexe et rapidement croissante à l'infini :

$$\mathrm{J}_n(\tau)=\frac{1}{2}(\mathbf{A}\,\tau,\,\tau)-(\mathbf{A}\,\bar{\sigma}_{n-1},\,\tau)+\delta t\,\Phi(\tau+\chi_n)-\delta t(\varepsilon(\mathbf{v}_n^1),\,\tau)-\delta t\left(\mathbf{A}\frac{d\chi_n}{dt},\,\tau\right),$$

$\bar{\sigma}_n$ de S_0 vérifie alors; quel que soit τ de S_0 :

$$\left(\frac{\mathbf{A}\,\bar{\sigma}_n-\mathbf{A}\,\bar{\sigma}_{n-1}}{\delta t}+\partial\Phi(\bar{\sigma}_n+\chi_n),\,\tau\right)=\left(\varepsilon(\mathbf{v}_n^1)-\mathbf{A}\frac{d\chi_n}{dt},\,\tau\right). \tag{40}$$

On définit une suite $\bar{\sigma}_{\mathrm{N}}$ en posant :

$$\bar{\sigma}_{\mathrm{N}}(t)=\frac{t-t_n}{\delta t}(\bar{\sigma}_{n+1}-\bar{\sigma}_n)+\bar{\sigma}_n,\qquad \text{si}\quad t\in[t_n,\,t_{n+1}[.$$

Nous allons montrer que cette suite converge dans $\mathrm{W}^{1,2}(0, \mathrm{T}; \mathrm{H})\cap\mathrm{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathrm{X})$ lorsque N tend vers $+\infty$. Sa limite sera la solution de (39).

Estimations I. — $\bar{\sigma}_n$ est choisie comme fonction test (champ virtuel) dans (40) et on obtient :

$$\left(\frac{\mathbf{A}\,\bar{\sigma}_n-\mathbf{A}\,\bar{\sigma}_{n-1}}{\delta t},\,\bar{\sigma}_n\right)+(\partial\Phi(\bar{\sigma}_n+\chi_n),\,\bar{\sigma}_n)=\left(\varepsilon(\mathbf{v}_n^1)-\mathbf{A}\frac{d\chi_n}{dt},\,\bar{\sigma}_n\right).$$

On note que :

$$(41)\quad (\mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n-\mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n)=\frac{1}{2}(\mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n-\mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1}) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n)-\frac{1}{2}(\mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1}),$$

et :

$$(\partial\Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n+\boldsymbol{\chi}_n), \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n)\geqq\Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n+\boldsymbol{\chi}_n)-\Phi(\boldsymbol{\chi}_n)\geqq-\Phi(\boldsymbol{\chi}_n).$$

Après sommation sur n de 1 à $M\leqq N$ on obtient :

$$\alpha|\bar{\boldsymbol{\sigma}}_M|^2\leqq C_1\left(\sum_{n=1}^{M}\delta t|\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n|^2\right)^{1/2}+C_2,$$

ce qui prouve :

(E1) $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_N$ *est borné dans* L^∞ (0, T; H).

Estimations II. — On remarque tout d'abord que :

$$(\partial\Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n+\boldsymbol{\chi}_n), \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1})=(\partial\Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n), \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1}) + (\partial\Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n+\boldsymbol{\chi}_n)-\partial\Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n), \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1})\geqq\Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n)-\Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1}) - |\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1}|L(\|\boldsymbol{\chi}_n\|_X).$$

Alors en prenant $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1})/\delta t$ comme fonction test dans (39) et en sommant sur n on obtient :

$$\alpha\sum_1^M\delta t\left|\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1}}{\delta t}\right|^2+\Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_M)-\Phi(\mathbf{0})\leqq C_3\left(\sum_1^M\delta t\left|\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1}}{\delta t}\right|^2\right)^{1/2}+C_4.$$

Donc :

(E2) $\Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_N)$ *est borné dans* L^∞ (0, T);

(E3) $\dfrac{d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_N}{dt}$ *est borné dans* L^2 (0, T; H).

Compte tenu de l'hypothèse (H3), (E2) et (E3) donnent :

(E4) $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_N$ *est borné dans* L^∞ (0, T; X),

(E1), (E3) et (E4) montrent qu'il existe $\bar{\boldsymbol{\sigma}}\in W^{1,2}(0,T;\mathbf{H})\cap L^\infty(0,T;X)$ et une sous-suite encore notée $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_N$ telle que :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_N \text{ tend vers } \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{dans } L^\infty(0, T; X) \text{ faible *},$$

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_N}{dt} \text{ tend vers } \frac{d\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{dt} \quad \text{dans } L^2(0, T; H) \text{ faible.}$$

On prouve par un argument classique de semi-continuité inférieure que :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(0)=\mathbf{0}.$$

On définit une suite de L^∞ (0, T; X′) en posant :

$$\Psi_N(t)=\partial\Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n+\boldsymbol{\chi}_n), \qquad \text{si} \quad t\in[t_{n-1}, t_n[.$$

On déduit de (E4) et de l'hypothèse (22) que ψ_N est borné dans L^∞ (0, T; X′) et qu'il existe Ψ dans L^∞ (0, T; X′) tel que :

$$\Psi_N \text{ tend vers } \Psi \quad \text{dans } L^\infty(0, T; X') \text{ faible *}.$$

En utilisant à nouveau un argument de monotonie classique on montre que :

$$\Psi(t)=\partial\Phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)+\boldsymbol{\chi}(t)), \quad \text{p. p. } t.$$

$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ est alors solution de (39). L'unicité de la solution de (39) est facilement établie et prouve que la suite entière $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_N$ converge vers $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$.
On pose $\boldsymbol{\sigma}=\bar{\boldsymbol{\sigma}}+\boldsymbol{\chi}$. $\boldsymbol{\sigma}$ élément de $\mathscr{H}_{ad}(t)$ vérifie, quel que soit $\boldsymbol{\tau}$ de S_0 :

$$\left(\mathbf{A}\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}+\partial\Phi(\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau}\right)=(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^1), \boldsymbol{\tau}),$$

$$-\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{f}; \qquad \boldsymbol{\sigma}(0)=\boldsymbol{\sigma}_0.$$

Problème en vitesse (de déplacement).

Lemme 1. — *Soit* $\mathbf{e}\in X'$ *et tel que : pour tout* $\boldsymbol{\tau}$ *de* S_0 :

$$(\mathbf{e}, \boldsymbol{\tau})=0.$$

Alors il existe $\mathbf{v}\in\mathscr{U}_0$ *vérifiant :*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})=\mathbf{e}.$$

Ce lemme est une conséquence facile des résultats de Moreau [39] et Paris [40]. On l'applique à :

$$\mathbf{e}(t)=\mathbf{A}\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}+\partial\Phi(\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^1).$$

Pour presque tout t, $\mathbf{e}(t)$ est le champ de déformation d'un champ de vitesse $\tilde{\mathbf{v}}$. On a de plus, compte tenu du fait que mes $(\partial\Omega_U)\neq 0$:

$$|\tilde{\mathbf{v}}|_{L^2(0,T;\mathscr{V})}\leqq C\left|\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}\right|_{L^2(0,T;H)}+C|\boldsymbol{\sigma}|_{L^2(0,T;X)}+|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^1)|_{L^2(0,T;H)},$$

$\mathbf{v}=\tilde{\mathbf{v}}+\mathbf{v}^1$ est la solution recherchée. Son unicité est une conséquence immédiate de l'unicité de $\boldsymbol{\sigma}$ $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})$ est la solution recherchée.

Problème quasi statique en plasticité parfaite.

Soit Φ^n une suite de potentiels régularisants; on considère les solutions $(\boldsymbol{\sigma}^n, \mathbf{v}^n)$ correspondantes, et on s'intéresse à leur limite lorsque n tend vers $+\infty$. La démonstration repose sur une variante d'une idée de Johnson [13] : à partir de l'hypothèse de sécurité on obtient une estimation L^1 sur la partie anélastique de la déformation. Nous allons détailler ce point :

ESTIMATIONS I. — $(\boldsymbol{\sigma}^n, \mathbf{v}^n)$ est solution de :

$$(42)\qquad \begin{cases} \mathbf{A}\dfrac{d\boldsymbol{\sigma}^n}{dt}+\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n)=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^n), \\ -\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}^n=\mathbf{f}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^n(0)=\boldsymbol{\sigma}_0, \qquad \boldsymbol{\sigma}^n\in\mathscr{H}_{ad}(t). \end{cases}$$

En choisissant $\boldsymbol{\sigma}^n-\boldsymbol{\chi}$ comme fonction test dans (42) on obtient après usage de la formule de Green :

$$(43)\quad \alpha|\boldsymbol{\sigma}^n(t)-\boldsymbol{\chi}(t)|^2+\int_0^t(\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n), \boldsymbol{\sigma}^n-\boldsymbol{\chi})$$
$$\leqq C\int_0^t\left(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^1)|+\left|\mathbf{A}\frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt}\right|\right)|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^n-\boldsymbol{\chi}|,$$

ce qui prouve :

(E5) $\boldsymbol{\sigma}^n$ *est borné dans* $L^\infty(0, T; H)$,

(E6) $(\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n), \boldsymbol{\sigma}^n-\boldsymbol{\chi})$ *est borné dans* $L^1(0, T)$.

A l'aide de l'inégalité :

$$\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n)\leqq\Phi^n(\boldsymbol{\chi})+(\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n), \boldsymbol{\sigma}^n-\boldsymbol{\chi}),$$

nous obtenons également :

(E7) $\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n)$ *est borné dans* $L^1(0, T)$,

(E8) $\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n(s))\,ds$ *est borné.*

LEMME 2. — *On suppose que l'hypothèse de sécurité* (45) *est satisfaite. Si* $(\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n), \boldsymbol{\sigma}^n-\boldsymbol{\chi})$, *est borné dans* $L^p(0, T)$, *alors* $\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n)$ *est borné dans* $L^p(0, T; (L^1(\Omega))^9_s)$.

Preuve :

$$\|\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n)\|_{(L^1(\Omega))^9_s}=\frac{1}{\delta'}\operatorname*{Sup}_{\|\tau\|_\infty\leqq\delta'}(\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n), \tau)$$
$$\leqq\frac{1}{\delta'}[(\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n), \boldsymbol{\chi}+\tau-\boldsymbol{\sigma}^n)+(\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n), \boldsymbol{\sigma}^n-\boldsymbol{\chi})]$$
$$\leqq\frac{1}{\delta'}[\Phi^n(\boldsymbol{\chi}+\tau)+(\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n), \boldsymbol{\sigma}^n-\boldsymbol{\chi})].$$

L'hypothèse de sécurité, l'hypothèse (27) montrent que pour $\|\tau\|_\infty<\delta'$:

$$\|\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n)\|_{(L^1(\Omega))^9_s}\leqq\frac{1}{\delta'}[(\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n), \boldsymbol{\sigma}^n-\boldsymbol{\chi})+C],$$

ce qui prouve le lemme.

Ce lemme et l'estimation (E6) montrent :

(E9) $\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n)$ *est borné dans* $L^1(0, T; (L^1(\Omega))^9_s)$.

ESTIMATIONS II. — La fonction test choisie dans (42) est :

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}^n(t)-\boldsymbol{\sigma}^n(t-h)}{h}-\frac{\boldsymbol{\chi}(t)-\boldsymbol{\chi}(t-h)}{h}.$$

On remarque que :

$$(\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n(t)), \boldsymbol{\sigma}^n(t)-\boldsymbol{\sigma}^n(t-h))\geqq\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n(t))-\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n(t-h)),$$

$$\int_h^T\left|\left(\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n), \frac{\boldsymbol{\chi}(t)-\boldsymbol{\chi}(t-h)}{h}\right)\right|\leqq\|\partial\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n)\|_{L^1(0,T;(L^1(\Omega))^9_s)}\left\|\frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt}\right\|_{L^\infty(0,T;(L^\infty(\Omega))^9_s)}.$$

Après intégration entre h et T on obtient :

$$\int_h^T\left(\mathbf{A}\frac{d\boldsymbol{\sigma}^n}{dt}(t), \frac{\boldsymbol{\sigma}^n(t)-\boldsymbol{\sigma}^n(t-h)}{h}\right)dt\leqq C+\int_0^h\Phi^n(\boldsymbol{\sigma}^n(s))\,ds$$
$$+\int_h^T\left(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^1)|+\left|\mathbf{A}\frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt}\right|\right)\left|\frac{\boldsymbol{\sigma}^n(t)-\boldsymbol{\sigma}^n(t-h)}{h}\right|dt.$$

En utilisant l'estimation (E8) et en faisant tendre h vers zéro, on obtient :

(E10) $$\frac{d\sigma^n}{dt} \textit{ est borné dans } L^2(0, T; H).$$

On revient alors à (43) et on montre à l'aide de (E10) :

(E11) $$(\partial\Phi^n(\sigma^n), \sigma^n - \chi) \textit{ est borné dans } L^2(0, T).$$

Le lemme 2 donne :

(E12) $$\partial\Phi^n(\sigma^n) \textit{ (et donc } \varepsilon(v^n)) \textit{ reste borné dans } L^2(0, T; (L^1(\Omega))^9_s).$$

Un lemme de [17] montre qu'en vertu des conditions aux limites on a alors :

(E13) $$v^n \textit{ est bornée dans } L^2(0, T; BD(\Omega)),$$

(E5), (E10), (E13) montrent qu'il existe $\sigma \in W^{1,2}(0, T; H)$ et $v \in L^2_w(0, T; BD(\Omega))$ tels que (quitte à extraire une sous-suite) :

$$\sigma^n \text{ tend vers } \sigma \quad \text{dans } W^{1,2}(0, T; H) \text{ faible},$$

$$v^n \text{ tend vers } v \quad \text{dans } L^2_w(0, T; BD(\Omega)) \text{ faible } *.$$

Il est immédiat de montrer que σ satisfait la condition initiale, les conditions aux limites et les équations d'équilibre. Il résulte de (E7) et (27) que $\sigma(t)$ appartient à P pour presque tout t [en fait pour tout t car $\sigma \in C^0(0, T; H)$]. Par usage de la formule de Green supposée satisfaite entre $\mathscr{U}_d$ et $\mathscr{H}_0 \cap X$ nous obtenons à partir de (42) :

(44) $$\left(A\frac{d\sigma^n}{dt}, \tau - \sigma^n\right) + (v^n, D\tau - D\sigma^n) + \Phi^n(\tau)$$
$$\geqq \Phi^n(\sigma^n) + \int_{\partial\Omega_U} \dot{U}^d(\tau - \sigma)\, n\, ds, \quad (\forall \tau \in \mathscr{H}_{ad}(t)).$$

Un argument classique de semi-continuité inférieure montre que :

$$-\left(A\frac{d\sigma}{dt}, \sigma\right) \geqq \limsup_{n \to +\infty} -\left(A\frac{d\sigma^n}{dt}, \sigma^n\right).$$

Il suffit alors de passer à la limite dans (44) pour montrer que (σ, v) est solution de (34).

L'unicité de σ résulte d'un argument simple de monotonie. L'unicité de v est fausse dans le cas général ce qui pose des problèmes pour le choix des potentiels régularisants. Nous reviendrons sur ce point.

Commentaires :

1. $M^1(\Omega)$ est le bon espace pour extraire des sous-suites de suites bornées dans $L^1(\Omega)$: cette propriété est utilisée par exemple pour approcher une masse de Dirac par une suite de fonctions pic d'intégrale 1 et de support de plus en plus réduit. Un phénomène analogue se produit en plasticité : la déformation anélastique se concentre dans une bande de plus en plus mince conduisant à la limite à une discontinuité de la vitesse.

2. Nous avons traité ici le cas de coefficients A_{ijkh} dépendant de façon connue de la température, elle-même étant une fonction connue du temps. Il serait intéressant de traiter le vrai problème de thermoplasticité en ajoutant une contrainte thermique et un couplage des équations avec l'équation de la chaleur.

De même le cas d'une déformation élastique fonction non linéaire du tenseur de contrainte $(A\sigma = \partial w^*/\partial\sigma(\sigma))$ semble être un problème ouvert.

3. Il faut remarquer que nous avons fait des hypothèses de régularité sur les solutions du problème élastique pour pouvoir établir l'existence d'une solution pour les problèmes dissipatifs. Ces hypothèses peuvent être allégées dans une large mesure. En les supposant réalisées on exclut pour le problème élastique la présence d'ondes de chocs (nécessairement causées par les conditions initiales en élasticité linéaire) et on s'intéresse à la formation de ces discontinuités de vitesse dues au caractère non linéaire de la plasticité.

2. Discontinuités de vitesse en Plasticité parfaite

Nous avons établi dans la section précédente l'existence d'une solution vitesse v dans un espace de fonctions pouvant être discontinues; ceci n'aurait rien de surprenant si nous envisagions le problème de l'analyse limite pour lequel il est bien connu que l'on a tout avantage à considérer des champs cinématiques discontinus. Au contraire, en faisant l'hypothèse de sécurité, nous nous sommes placés strictement en dessous de la charge limite et il est moins connu que les solutions v du problème d'évolution peuvent être discontinues sans qu'il y ait ruine de la structure (au sens où l'entend l'analyse limite classique). Dans un premier temps nous montrerons que les solutions de certains problèmes sont réellement discontinues. Puis nous discuterons brièvement la nature et l'origine de ces discontinuités. Nous ne le ferons pas en détail, renvoyant le lecteur intéressé par les phénomènes de localisation de la déformation aux articles de synthèse de Hill [2] et Rice [32]. On a eu systématiquement recours à des exemples élémentaires et quelque peu académiques mais qui, on l'espère, guideront l'intuition du lecteur.

2.1. Exemples

L'exemple qui suit est unidimensionnel et montre que les solutions en vitesse de déplacements du problème (34) peuvent effectivement être discontinues.

On considère une barre élastoplastique occupant l'ouvert $]-1, +1[$ et fixée à ses deux extrémités. Le matériau qui la constitue a un module d'Young égal à 1 tandis que le domaine d'élasticité est $[-1, +1]$:

$$\Omega =]-1, +1[, \qquad A(x, t) = 1,$$
$$P(x, t) = [-1, +1].$$

Conditions aux limites :

$$u(1) = u(-1) = 0,$$

Condition initiale :

$$\sigma_0 = 0, \qquad u_0 = 0.$$

Chargement :

$$f(x, t) = \begin{cases} t(1-x), & \text{si } x > 0, \\ -t(1+x), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Les champs de contraintes statiquement admissibles sont de la forme :

$$\tau(x, t) = C_\tau(t) + \begin{cases} t(x - x^2/2), & \text{si } x > 0, \\ -t(x + x^2/2), & \text{si } x \leqq 0, \end{cases} \tag{45}$$

où $C_\tau(t)$ est une fonction de la seule variable t.

Solution élastique.

La solution élastique σ^{el} minimise l'énergie :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |\tau(x)|^2 \, dx,$$

parmi les champs statiquement admissibles de la forme (45). On trouve :

$$C_{\sigma^{el}} = -t/3.$$

La barre reste donc élastique jusqu'à $t = 3$. A cet instant le point $x = 0$ se plastifie.

Solution élastoplastique.

Il est facile de vérifier que l'hypothèse de sécurité est satisfaite jusqu'à $t = 4$. Pour $t \in [3, 4[$ nous savons que la solution en contrainte σ est unique (*cf.* section 1.4). Cette solution est :

$$\sigma(x, t) = -1 + \begin{cases} t(x - x^2/2), & \text{si } x \geqq 0, \\ -t(x + x^2/2), & \text{si } x \leqq 0. \end{cases} \tag{46}$$

En effet il suffit de vérifier :

$$\int_{-1}^{+1} (\dot{\sigma}(x, t), \tau(x) - \sigma(x, t)) \, dx \geqq 0,$$

parmi les τ de la forme (45) satisfaisant :

$$-1 \leqq C_\tau^1 \leqq 1 - t/2.$$

Or l'expression à évaluer est :

$$2\int_0^1 (C_\tau + 1)\left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{2}{3}(C_\tau + 1) \geqq 0.$$

La solution σ est donc donnée en (46) et le seul point plastifié est $x = 0$. En dehors de ce point le solide est élastique et on a :

$$\frac{dv}{dx} = \dot{\sigma},$$

donc :

$$v(x, t) = \begin{cases} C_+(t) + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}, & x > 0, \\ C_-(t) - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}, & x < 0, \end{cases}$$

C_+ et C_- sont des fonctions de la seule variable t que l'on ajuste à l'aide des conditions aux limites :

$$v(1, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_+(t) = -1/3,$$
$$v(-1, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_-(t) = +1/3,$$

on constate alors que :

$$v^-(0, t) = \lim_{\substack{x<0 \\ x\to 0}} v(x, t) = +1/3, \qquad v^+(0, t) = \lim_{\substack{x>0 \\ x\to 0}} v(x, t) = -1/3.$$

Non unicité du champ de vitesse.

On considère une barre élastoplastique qui occupe l'ouvert]0, 1[, fixée en 0 et soumise en 1 à une vitesse imposée λ. Les données du problème sont :

$$P=[-1,+1], \qquad A=1, \qquad v(0)=0, \qquad v(1)=\lambda,$$

$$d\sigma/dx=0, \qquad \sigma_0=0.$$

L'hypothèse de sécurité est satisfaite par $\chi=0$.

Solution élastique :

$$u=\lambda x, \qquad \sigma=\lambda.$$

La barre reste élastique jusqu'en $\lambda=1$.

Solution élastoplastique. — La contrainte se bloque en $\sigma=1$. Le système (34) se réduit à :

$$(v, D\tau-D\sigma)\geqq\lambda(\tau(1)-\sigma(1)), \qquad (\forall\tau\in P),$$

$$\int_0^1 v(x)\frac{d\tau}{dx}dx\geqq\lambda\tau(1)-\lambda, \qquad (\forall\tau\in[-1,+1]). \tag{47}$$

On vérifie sans difficultés que l'inéquation (47) admet une infinité de solutions ($v=0$, $v=\lambda$, $v=\lambda x$ sont solutions mais aussi $v=0$ si $x<x_0<1$, $v=\lambda$ si $x\geqq x_0$).

Il est donc vain d'espérer montrer l'unicité de v même sous de fortes hypothèses de régularité (ici il n'y a pas unicité des solutions continues). Remarquons aussi que le concept de charge limite est tout à fait inadapté aux cas de chargement par déplacements imposés.

2.2. Nature et origine des discontinuités

Il faut distinguer deux types de discontinuités : les discontinuités tangentielles auxquelles il est aisé de donner une interprétation physique (et connues en analyse limite bidimensionnelle sous le nom de glissements), et les discontinuités normales (appelées chocs stationnaires par certains auteurs) dont l'interprétation est plus délicate. Un premier résultat nous permet de classer la question pour les matériaux à déformations plastiques incompressibles.

Proposition. — *On suppose que le convexe* $P(\mathbf{x}, t)$ *local ne porte que sur le déviateur du tenseur des contraintes. Alors sur toute surface* S *de normale* $\mathbf{v}$ *contenue dans* Ω :

$$\mathbf{v}^+\,\mathbf{v}=\mathbf{v}^-.\mathbf{v} \quad \text{dans } L^1(S). \tag{48}$$

Cette proposition signifie donc que les seules discontinuités possibles pour ce type de matériaux sont des discontinuités tangentielles.

Preuve. — Le convexe de Plasticité étant invariant par adjonction d'une pression on peut choisir dans (34) τ de la forme :

$$\tau_{ij}=\sigma_{ij}+p\,\delta_{ij},$$

où $p\in H_0^1(\Omega)$.

Alors :

$$\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\sigma}\right)=\int_\Omega\left(\frac{d}{dt}(\mathrm{Tr}(\mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma})), p(\mathbf{x})\right)dx,$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{D}\boldsymbol{\tau}-\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma})=\int_\Omega(\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{grad}\,p(\mathbf{x}))\,dx,$$

et donc pour tout p de $H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega\left[\left(\frac{d}{dt}(\mathrm{Tr}(\mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma})), p(\mathbf{x})\right)+(\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{grad}\,p(\mathbf{x}))\right]dx=0,$$

ce qui prouve :

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma})\right)=\mathrm{div}(\mathbf{v}), \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

La mesure $\mathrm{div}(\mathbf{v})$ est donc de masse nulle sur toute surface et en choisissant φ sous la forme $p\,\delta$ dans (A3) on obtient :

$$\int_s(v_i^+\,\nu_i-v_i^-\,\nu_i)\,p\,d\gamma=0,$$

ce qui prouve (48).

Nous voyons donc que pour des matériaux dont le critère ne porte que sur le déviateur (cas courant des métaux) les seules discontinuités possibles sont tangentielles. Ces discontinuités sont physiquement acceptables et observables [33] : elles correspondent à de minces zones de cisaillement maximal qui peuvent être assimilées à des lignes (ou surfaces dans R^3).

Par contre des discontinuités normales ne sont pas exclues dans le cas de matériaux dont le seuil dépend de la pression (cas courant des sols). En dimension 1 ou 2 ces discontinuités peuvent être dues à la schématisation géométrique : un convexe de von Mises qui ne porte que sur le déviateur pour un solide tridimensionnel devient un convexe borné (donc portant aussi sur la pression) dans le cas d'une schématisation par contraintes planes. Les discontinuités normales alors observées dans R^2 peuvent être la projection de discontinuités tangentielles dans R^3. Cependant dans R^3 il est difficile d'intégrer les discontinuités normales dans la classification usuelle et on est amené à se demander si elles sont dues :

(*a*) à un phénomène physique réel (d'origine microscopique) pris en compte par le modèle adopté. C'est la position de certains auteurs;

(*b*) à un défaut de l'hypothèse quasi statique : c'est la notion de chocs stationnaires [2] et il serait alors préférable de poser le problème en dynamique;

(*c*) à une incohérence dans les hypothèses faites lors de l'établissement des équations, et plus précisément à une incohérence entre la Plasticité et l'hypothèse des petites perturbations;

(*d*) à une mauvaise définition de la notion de charge limite. Zyczkowski [34] a en particulier proposé une théorie des décohésions où la valeur ultime de la charge est définie comme la première valeur à partir de laquelle des discontinuités inadmissibles apparaissent.

Les solutions (*a*) et (*b*) ne nous semblent pas devoir être retenues. La solution (*d*) a de nombreux arguments en sa faveur dont la résolution de certains paradoxes. Cependant elle présente l'inconvénient d'être locale (mise en évidence d'une discontinuité inadmissible dans la structure) à l'opposé de la définition classique qui est globale (évaluation de la puissance dissipée dans toute la structure).

Nous retiendrons l'explication (*c*) : il y a incohérence entre la dégénérescence de la matrice de rigidité du corps (dégénérescence due à la Plasticité) et l'hypothèse des petites perturbations. Il est facile de se convaincre que cette incohérence n'est due à la Plasticité que par l'intermédiaire de la dégénérescence en question : on peut construire en Élasticité des exemples de telles dégénérescences conduisant aux mêmes discontinuités.

Exemple. — Prenons une barre élastique ($\Omega =]0, 1[$) dont le module d'Young vaut :

$$E^\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{si } x \leqq \varepsilon, \\ 1, & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$

Cette barre est fixée en $x=0$ et soumise en $x=1$ à une traction F. Les équations sont :

$$\frac{d\sigma^\varepsilon}{dx} = 0, \qquad \sigma^\varepsilon(1) = F \quad \Rightarrow \quad \sigma^\varepsilon(x) = F,$$

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} = \begin{cases} \sigma^\varepsilon/\varepsilon, & \text{si } x \leqq \varepsilon, \\ \sigma^\varepsilon, & \text{si } x > \varepsilon, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u^\varepsilon(x) = \begin{cases} F x/\varepsilon, & \text{si } x \leqq \varepsilon, \\ F(x-\varepsilon)+F, & \text{si } x \geqq \varepsilon. \end{cases}$$

On voit que $u^\varepsilon(\varepsilon) = F$ et donc que lorsque ε tend vers zéro :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon(\varepsilon) = F, \qquad \text{alors que } u^\varepsilon(0) = 0.$$

A la limite la barre casse donc en $x=0$. Si on reprend les équations en gardant l'expression complète de la déformation, on obtient :

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du^\varepsilon}{dx}\right)^2 = \begin{cases} F/\varepsilon, & \text{si } x \leqq \varepsilon, \\ F, & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$

On trouve :

$$u^\varepsilon(x) = \begin{cases} (-1+\sqrt{1+2F/\varepsilon})\,x & \text{si } x \leqq \varepsilon, \\ (-1+\sqrt{1+2F})(x-\varepsilon) - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon F}. \end{cases}$$

Alors :

$$u^\varepsilon(\varepsilon) = -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon F}, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon(\varepsilon) = 0.$$

On voit donc que c'est l'hypothèse des petites perturbations qui conduit à une discontinuité anormale. Les problèmes mathématiques de la Plasticité en grands déplacements sont, à la connaissance de l'auteur, des problèmes ouverts.

2.3. Champs cinématiquement admissibles

Dans ce paragraphe nous cherchons en vue de l'Analyse limite à donner une définition cohérente d'un champ cinématiquement admissible et de la puissance dissipée dans ce champ, en tenant compte des discontinuités possibles mais inconnues, à l'intérieur de Ω comme sur son bord.

Il est habituel de définir un champ cinématiquement admissible par :

1° sa donnée à l'intérieur de Ω (ou la donnée du champ de déformation correspondante);

2° la condition aux limites :

$$v_i = \dot{U}_i^d, \quad \text{sur } \partial\Omega_U.$$

Pour la Plasticité parfaite ce schéma n'est plus valable pour les raisons suivantes :

(i) les conditions aux limites ne sont pas satisfaites *stricto sensu*;

(ii) il ne suffit pas de se donner la valeur de la déformation à l'intérieur de Ω, car le bord peut avoir une contribution non nulle à la dissipation totale du corps.

Le point (i) est clair : des lignes de glissement peuvent apparaître sur le bord de Ω, au même titre qu'à l'intérieur. Les conditions aux limites ne sont pas satisfaites par la trace interne de la vitesse mais par une trace externe qu'il reste à définir. Intuitivement on voit sur l'exemple du corps encastré que l'on doit prolonger le champ de vitesse $\mathbf{v}$ à l'outil qui réalise l'encastrement; c'est alors la trace externe (vue de l'extérieur de Ω) qui est nulle et non la trace interne (vue de l'intérieur de Ω).

Nous définissons alors un espace de champs cinématiquement admissibles sur $\overline{\Omega}$ (fermé) comme suit :

sur $\mathrm{BD}(\mathrm{R}^N)$ on définit la relation d'équivalence :

$$\mathbf{u}\,\mathscr{R}\,\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{u}|_\Omega = \mathbf{v}|_\Omega, & \text{dans } (\mathrm{L}^1(\Omega))^3, \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})|_{\overline{\Omega}} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})|_{\overline{\Omega}}, & \text{dans } \mathrm{M}(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

On pose :

$$\mathrm{BD}(\overline{\Omega}) = \mathrm{BD}(\mathrm{R}^N)/\mathscr{R}.$$

(*Remarque.* — $\overline{\Omega}$ n'étant pas un ouvert, il n'est pas question de donner une définition de $\mathrm{BD}(\overline{\Omega})$ par les distributions.)

On vérifie que :

$$\mathbf{u}\,\mathscr{R}\,\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}^+|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}^+|_{\partial\Omega},$$

(*voir* notations dans l'annexe).

On pose :

$$\mathrm{BD}_{\mathrm{ad}}(\overline{\Omega}) = \{\mathbf{v} \in \mathrm{BD}(\overline{\Omega}),\ \mathbf{v}_i^+ = \dot{\mathrm{U}}_i^d \text{ sur } \partial\Omega_{\mathrm{U}}\}, \tag{49}$$

$\mathrm{BD}_{\mathrm{ad}}(\overline{\Omega})$ est l'espace correct des champs cinématiquement admissibles. On montre facilement que la solution du résultat 2 appartient à $\mathrm{BD}_{\mathrm{ad}}(\overline{\Omega})$ et satisfait ainsi les conditions aux limites au sens de (49). On remarque alors que la donnée d'un champ admissible comprend la donnée d'un champ de déformation sur le fermé $\overline{\Omega}$. On autorise ainsi les phénomènes de glissement sur le bord au même titre qu'à l'intérieur.

Il reste maintenant à définir de façon correcte la puissance dissipée pour un champ de $\mathrm{BD}(\overline{\Omega})$ ainsi que la puissance des efforts extérieurs.

Pour tout $\mathbf{v}$ de $\mathrm{BD}(\overline{\Omega})$ on pose :

$$\pi(\mathbf{v}) = \operatorname*{Sup}_{\sigma \in (\mathscr{D}(\overline{\Omega}))^9_s \cap \mathrm{P}} \int_{\overline{\Omega}} \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}). \tag{50}$$

Cette définition de la dissipation inclut la dissipation due au bord.

D'autre part les forces surfaciques extérieures travaillent sur la trace externe du champ v et la définition correcte de la puissance des efforts extérieurs est :

$$\mathrm{L}(\mathbf{v}) = \int_\Omega f_i v_i\, dx + \int_{\partial\Omega_{\mathrm{F}}} \mathrm{F}_i^d v_i^+\, ds, \qquad (\forall \mathbf{v} \in \mathrm{BD}(\overline{\Omega})). \tag{51}$$

Les définitions (50) et (51) sont cohérentes avec le principe des puissances virtuelles car comme il est rappelé en annexe :

$$(\forall \sigma \in (\mathscr{D}(\overline{\Omega}))^9_s), \qquad \int_{\overline{\Omega}} \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) + \int_\Omega \sigma_{ij,j} v_i\, dx = \int_{\partial\Omega} v_i^+ \sigma_{ij} n_j\, ds.$$

La définition du coefficient cinématique en analyse limite est :

$$\lambda_c = \operatorname*{Inf}_{\mathbf{v} \in \mathrm{BD}_{\mathrm{ad}}(\overline{\Omega})} \left(\frac{\pi(\mathbf{v})}{\mathrm{L}(\mathbf{v})} \right).$$

Ce formalisme considérant le corps dissipatif comme étant le fermé $\overline{\Omega}$ a permis de répondre à un paradoxe de Friaa et Frémond [35] sur l'analyse limite [38].

Remarque. — Il est intéressant de noter que la définition (50) de la puissance dissipée coïncide avec celle de Strang-Temam [24] (obtenue par relaxation des conditions aux limites) sur l'espace $\mathrm{LD}(\Omega) \cap \mathrm{BD}_{\mathrm{ad}}(\overline{\Omega})$:

$$\mathrm{LD}(\Omega) = \{\mathbf{u} \mid u_i \in \mathrm{L}^1(\Omega);\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega)\}.$$

Notre définition nous semble cependant préférable pour plusieurs raisons :

1° elle est donnée sur $\mathrm{BD}_{\mathrm{ad}}(\overline{\Omega})$ qui contient des champs discontinus ce qui n'est pas le cas de $\mathrm{LD}(\Omega)$ espace plus petit;

2° elle ne dépend pas des conditions aux limites qui sont contenues dans la définition de l'espace des vitesses admissibles, alors que dans l'optique de Temam et Strang ces conditions sont prises en compte dans la dissipation;

3° elle permet d'introduire des discontinuités sur $\partial\Omega_F$. Ce point s'est révélé essentiel dans l'étude de l'exemple de Friaa et Frémond.

2.4. Conclusions. Problèmes ouverts

Les efforts récents pour définir un cadre cinématique correct en Plasticité parfaite ont permis de franchir une étape importante dans la compréhension mathématique de ce modèle. En utilisant et en développant ces travaux la présente étude s'est efforcée de replacer la Plasticité parfaite dans le cadre plus général des matériaux dissipatifs standard. Il est maintenant clair que les espaces de fonctions régulières sont réservés aux matériaux à potentiels de dissipation régulier, alors que les matériaux à potentiel irrégulier exigent l'introduction de champs discontinus.

La Plasticité reste cependant une source de problèmes pour les mathématiciens et pour les mécaniciens et les questions ouvertes restent nombreuses. Citons en particulier :

1° la régularité du tenseur de contrainte;

2° la détermination *a priori* des zones de discontinuité de vitesse;

3° l'extension des résultats acquis pour les matériaux standard aux matériaux non standard.

Cette liste n'est pas exhaustive et sera certainement prochainement modifiée par les progrès parallèles de l'Analyse Convexe et de la Mécanique de Milieux Continus.

ANNEXE

Rappelons que $\mathrm{BD}(\Omega)$ est un espace de Banach non reflexif [20]. De plus c'est le dual d'un espace de Banach que Matthies S.-C. [16] ont caractérisé. Il jouit des propriétés de traces suivantes ([20], [21]) :

Théorème. — (*a*) *Il existe une application trace* $\mathbf{u} \to \mathbf{u}^-$ *linéaire continue et surjective de* $\mathrm{BD}(\Omega)$ *sur* $(\mathrm{L}^1(\partial\Omega))^3$ *telle que l'on ait pour tout* φ *de* $(\mathscr{D}(\overline{\Omega}))^9_s$:

$$\text{(A1)} \qquad \int_\Omega \varphi_{ij,j} u_i \, dx + \int_\Omega \varphi_{ij} \, d\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \int_{\partial\Omega} u_i^- \, \varphi_{ij} n_j \, ds.$$

(*b*) *Soit* (S) *une surface contenue dans* Ω (*localement une variété orientable de dimension* 2) *séparant* Ω *en* Ω^- *et* Ω^+. *Il existe deux applications trace* $\mathbf{u} \to \mathbf{u}^-$ *et* $\mathbf{u} \to \mathbf{u}^+$ *linéaires continues et surjectives de* $\mathrm{BD}(\Omega)$ *sur* $(\mathrm{L}^1(\mathrm{S}))^3$ *telles que l'on ait pour tout* φ *de* $(\mathscr{D}(\Omega))^9_s$:

$$\text{(A2)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega^-} \varphi_{ij,j} u_i \, dx + \int_{\Omega^-} \varphi_{ij} \, d\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \int_S u_i^- \, \varphi_{ij} n_j \, ds, \\ \displaystyle\int_{\Omega^-} \varphi_{ij,j} u_i \, dx + \int_{\overline{\Omega}^-} \varphi_{ij} \, d\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \int_S u_i^+ \, \varphi_{ij} n_j \, ds, \end{cases}$$

$\mathbf{u}^-$ et $\mathbf{u}^+$ sont les traces internes et externes de $\mathbf{u}$ sur S (la normale à S étant orientée de Ω^- vers Ω^+).

Les traces définies en (*a*) et (*b*) coïncident avec les traces classiques dans le cas de champs $\mathbf{u}$ réguliers. On voit cependant qu'une masse possible de $\varepsilon(\mathbf{u})$ sur S peut provoquer une discontinuité de $\mathbf{u}$ à la traversée de S. Cette discontinuité vérifie :

$$\text{(A3)} \qquad \int_S (u_i^+ - u_i^-) \, \varphi_{ij} n_j \, ds = \int_S \varphi_{ij} \, d\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}),$$

pour tout φ de $(\mathscr{D}(\Omega))^9_s$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Halphen B. et Nguyen Quoc Son, *Sur les matériaux standard généralisés* (*J. Mécan.*, vol. 14, 1975, p. 39-63).

[2] Hill R., *Discontinuity Relations in Mechanics of Solids* in *Progress in Solid Mechanics*, vol. II, Sneddon et Hill, éd., North Holland, 1961, p. 247-276.

[3] Hodge P. et Prager W., *A Variational Principle for Plastic Materials with Strain Hardening* (*J. Math. and Phys.*, 27, 1949, p. 1).

[4] Greenberg H. J., *Complementary Minimum Principles for an Elastic Plastic Material* (*Quart. Appl. Math.*, vol. 7, 1948, p. 85).

[5] Koiter W., *General Theorems for Elasto-Plastic Solids* in *Progress in Solid Mechanics*, vol. I, Sneddon et Hill, éd., 1964. p. 164-221.

[6] Prager W. et Hodge P., *Theory of Perfectly Plastic Solids*, Wiley, New York, 1951.

[7] Moreau J. J., *Fonctionnelles Convexes*, Cours au Collège de France, Paris, 1966.

[8] Moreau J. J., *Application of Convex Analysis to the Treatment of Elasto-Plastic Systems* (*Springer Lecture Notes*, N° 503, P. Germain et B. Nayroles, éd., 1975, p. 56-89).

[9] Moreau J. J., *Evolution Problem Associated with a Moving Convex Set in a Hilbert Space* (*J. Diff. Equa.*, vol. 26, 1977, p. 347-374).

[10] Nayroles B., *Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites* (*J. Mécan.*, vol. 9, 1970, p. 491-506).

[11] Debordes O. et Nayroles B., *Sur la théorie et le calcul à l'adaptation des structures élasto-plastiques* (*J. Mécan.*, vol. 15, 1976, p. 1-53).

[12] DUVAUT G. et LIONS J. L., *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, 1972.
[13] JOHNSON C., *Existence Theorems for Plasticity Problems* (*J. Math. pures et appl.*, vol. 55, 1976, p. 431-444).
[14] MERCIER B., *Sur la théorie et l'analyse numérique de problèmes de Plasticité* (*Thèse*, Université Paris-VI, 1977).
[15] NGUYEN QUOC SON, *Matériau plastique écrouissable* (*Arch. of Mech.*, vol. 25, 1973, p. 695-702).
[16] MATTHIES H., STRANG G. et CHRISTIANSEN E., *The Saddle Point of a Differential Program* in *Energy Methods In Finite Element Analysis*, GLOWINSKI, RODIN et ZIENCKIEWICZ, éd., Wiley and Sons, 1979.
[17] SUQUET P. M., *Existence et régularité des solutions des équations de la Plasticité parfaite* (C. R. Acad. Sc., Paris, série A, t. 286, 1978, p. 1201-1204).
[18] SUQUET P. M., *Existence and Regularity of Solutions for Plasticity problems. Variational Methods in Solids Mechanics*, S. NEMAT NASSER, éd., Pergamon. 1980.
[19] SUQUET P. M., *Évolution Problems for a Class of Dissipative Materials*, *Quart. Appl. Math.*, (à paraître).
[20] SUQUET P. M., *Un espace fonctionnel pour les équations de la Plasticité* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, série A, t. 286, 1978, p. 1129-1132 et *Ann. Fasc. Sc. Toulouse*, vol 1, 1979, p. 77-87).
[21] TEMAM R. et STRANG G., *Existence de solutions relaxées pour les équations de la Plasticité, Étude d'un espace fonctionnel* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 287, série A, , 1978, p. 515-518).
[22] KOHN R., *New Estimates for Deformations in Terms of Their Strains* (*PH. D. Thesis*, Princeton University, 1979).
[23] CHRISTIANSEN E., à paraître.
[24] TEMAM R. et STRANG G., *Duality and Relaxation in the Variational Problems of Plasticity*, [*J. Mécan.*, vol. 19, n° 3, 1980 (à paraître)].
[25] GERMAIN P., *Mécanique des milieux continus*, t. I, Masson, 1973.
[26] FRIAA A., *Le matériau de Norton-Hoff généralisé et ses applications en Analyse limite* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 286, série A, 1978 et *Thèse*, Université Paris-VI, 1979).
[27] MANDEL J., *Mécanique des milieux continus*, t. II, Paris,Gauthier-Villars, 1966.
[28] LIONS J. L., *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Presses de l'Université de Montréal, 1965.
[29] BOURBAKI N., *Intégration*, chap. 1, 2, 3, 4, Hermann, Paris, 1952.
[30] IONESCU TULCEA, *Topics in the Theory of Liftings*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
[31] BREZIS H., *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes non linéaires de contraction dans les espaces de Hilbert*, North Holland, 1973.
[32] RICE J. R., *The Localization of Plastic deformation* in *Theoretical and Applied Mechanics*, W. KOITER, éd., North Holland, 1976, p. 207-220).
[33] JOHNSON W., SOWERBY R., et HADDOW J. B., *Plane Strain Slip Line Fields*, EDWARD ARNOLD, éd., Londres, 1970.
[34] SZUWALSKI et ZYCZKOWSKI M., *On the Phenomenon of Decohesion in Perfect Plasticity* (*Int. J. of Sol. and Stru.*, vol. 9, 1973, p. 85-98).
[35] FREMOND M. et FRIAA A., *Analyse limite. Comparaison des méthodes statique et cinématique* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 286, série A, 1978, p. 107-110).
[36] MATTHIES H., *Existence Theorems in Thermo-Plasticity* (*J. Mécan.*, vol. 18, 1979, p. 695-712).

[37] DEBORDES O., *Adaptation des structures élastiques parfaitement plastiques dans Matériaux et Structures sous chargement cyclique*, 1978, A.A.I.A.E.E.N.P.C.
[38] SUQUET P. M., *Mathematical Problems in the Theory of Elasto-Plastic Plates* (*Letters in Eng. Sc.*, vol. 18, 1980, p. 527-539).
[39] MOREAU J. J., *Champs et distributions de tenseurs déformation sur un ouvert de connexité quelconque* (*Séminaire Anal. Conv.*, Montpellier, 1976, Exposé n° 5).
[40] PARIS L., *Etude de la régularité d'un champ de vecteurs à partir de son tenseur déformation* (*Séminaire Anal. Conv.*, Montpellier 1976, Exposé n° 12).
[41] LANCHON H., *Torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section simplement ou multiplement connexe* (*J. Mécan.*, vol. 13, 1974, p. 267-320).

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1979,
révisé le 13 juin 1980.)