Aix-Marseille Université 2013-2014

Analyse 1

CORRIGÉ DU PARTIEL 2 DU VENDREDI 21 MARS 2014

Exercice 1

1. Déterminer, si elle existe la limite en 0 de la fonction
$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$$
En multipliant et divisant par l'expression conjuguée du numérateur, on a pour tout $x \neq 0$,
$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$
Par continuité de la fonction racine sur $[0,+\infty[$ et les opérations usuelles sur les limites, le dénominateur tend vers 2. Donc le quotient tend vers $\frac{2}{2}=1$ quand x tend vers 0.
2. Pour deux entiers $n \geq 0$ et $m \geq 0$, déterminer, si elle existe la limite en 0 de la fonction
$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$
On discutera suivant les valeurs de m et n.
On procède comme à la question 1) (qui traitait le cas particulier $m=n=1$) : on a pour tout $x \neq 0$,
$$\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n} = \frac{(\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} = \frac{2x^{m-n}}{(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}.$$
$(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})$ *tend vers 2 quand x tend vers 0.*
   - *Si $m=n$, alors $x^{m-n}=1$, donc la fonction tend vers $\frac{2}{2}=1$ en 0 ;*
   - *Si $m>n$, alors $\lim_{x\to 0} x^{m-n}=0$ et donc la fonction tend vers 0 en 0 ;*
   - *Si $m<n$, alors $\lim_{x\to 0^+} x^{n-m}=+\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} x^{n-m}=-\infty$. Donc la fonction admet une limite à droite en 0 égale à $+\infty$ et une limite à gauche égale à $-\infty$. Les limites à droite et à gauche en 0 étant distinctes, la fonction n'admet pas de limite en 0.*

Exercice 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1,+1\} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$
La fonction f se prolonge-t-elle par continuité en -1 et en $+1$?
On met au même dénominateur $1-x^2=(1-x)(1+x)$:
$$f(x) = \frac{1+x}{1-x^2} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\frac{1}{1+x}$$
La limite en 1 de f est $-\frac{1}{2}$ car le dénominateur tend vers 2 (limite d'un quotient). Donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1)=-\frac{1}{2}$.
Puisque $\lim_{x\to -1^+}(1+x)=0^+$, alors la limite à droite de f en -1 est égale à $+\infty$. Donc f n'admet pas de limite finie en -1, ce qui signifie que f ne se prolonge pas par continuité en -1.

Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f admette 0 comme limite en 0 et g soit bornée.

   (a) Donner la définition d'une fonction ayant 0 comme limite en 0.

   La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a pour limite 0 en 0 si

   $$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, (|x| < \eta \Rightarrow |f(x)| < \epsilon). \qquad (*)$$

   (b) Donner la définition d'une fonction bornée.

   La fonction $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ est bornée si :

   $$\exists M \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, |g(x)| \leq M.$$

   (c) Montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $h(x) = f(x)g(x)$ admet 0 comme limite en 0.

   Soit M tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, |g(x)| \leq M$. Fixons $\epsilon > 0$ quelconque et soit $\eta > 0$ associé à $\frac{\epsilon}{M}$ dans la relation $(*)$ ci-dessus.

   Alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $|x| \leq \eta$,

   $$|h(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon.$$

   Finalement, ceci étant valable pour tout $\epsilon > 0$, on a montré :

   $$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, (|x| < \eta \Rightarrow |h(x)| < \epsilon),$$

   ce qui signifie que h a pour limite 0 en 0.

   Autre solution : en utilisant le théorème des gendarmes : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

   $$0 \leq |h(x)| = |f(x)||g(x)| \leq |f(x)|M,$$

   or $\lim_{x \to 0} |f(x)|M = 0$, donc $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$.

2. (a) Donner la définition d'une fonction continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, puis celle d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est continue en x_0 si f a pour limite $f(x_0)$ en x_0, c'est-à-dire :

   $$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon).$$

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ si f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

   (b) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h_1(x) := \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $h_1(0) = 0$ est-elle continue ?

   La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme composée des fonctions $\sin$ et $x \to 1/x$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ respectivement. Donc la fonction h_1 est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme produit de fonctions continues sur cet ensemble.

   Examinons à présent la continuité en 0. La fonction $\sin$ étant continue en 0, on a $\lim_{x \to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$.

   D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

   $$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1,$$

   donc la fonction $x \to \sin(\frac{1}{x})$ est bornée sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   En appliquant le résultat de la question 1 (c), on en déduit que $\lim_{x \to 0} h_1(x) = 0 = h_1(0)$. Donc h_1 est continue en 0

(c) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et par $h_2(0) = 0$ est-elle continue ?

la fonction h_2 est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme composée de fonctions continues.

Examinons à présent la continuité en 0. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

converge vers 0.

Si la fonction h_2 était continue en 0, la suite $(h_2(x_n))$ convergerait vers $h_2(0) = 0$ (caractérisation séquentielle de la continuité).

Or pour tout n, $h_2(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$, donc la suite $(h_2(x_n))$ converge vers 1.

Conclusion : la fonction h_2 n'est pas continue en 0.

Exercice 4 Montrer que le polynôme $P(x) = x^{2014} + 5x^{17} - 1$ admet une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

La fonction polynomiale P est continue sur l'intervalle $[0, 1]$. De plus, $P(0) = -1 < 0$ et $P(1) = 5 > 0$. Puisque $0 \in]P(0), P(1)[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]0, 1[$ tel que $P(a) = 0$.

Exercice 5 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Soit $a > 0$. Quelle est la forme de l'ensemble image $f([0, a])$?

   L'image d'un segment (intervalle fermé borné) par une fonction continue est un segment. Donc $f([0, a])$ est un segment.

2. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Démontrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

   Fixons $\epsilon > 0$ et soit ℓ la limite de f en $+\infty$. Il existe $A > 0$, tel que $\forall x \geq A, |f(x) - \ell| \leq \epsilon$. Fixons un tel A. Alors pour tout $x \geq A$,

   $$-\epsilon < f(x) - \ell < \epsilon,$$

   c'est-à-dire

   $$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon.$$

   D'autre part, $f([0, A])$ est un segment $[m, M]$. Posons $\alpha = \min(\ell - \epsilon, m)$ et $\beta = \max(\ell + \epsilon, M)$. Alors

   $$\forall x \in [0, +\infty[, \alpha \leq f(x) \leq \beta.$$

   Donc f est bornée sur $[0, +\infty[$.

3. f atteint-elle nécessairement ses bornes ?

   Ben non !

   Prenez par exemple $f(x) = -\frac{1}{x+1} + 2$. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $f([0, +\infty[) = [f(0), 2[= [1, 2[$. Donc f n'atteint pas sa borne supérieure 2.