L1 MCPI 2021-2022

Analyse et probabilités

PLANCHE 1

Dérivabilité d'une fonction

Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas corrigés en séance.

1 Dérivabilité

Exercice 1. Les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}$ sont-elles dérivables en 0 ?

$$f_1 : x \mapsto |x|, \quad f_2 : x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \text{ et } f_3 : x \mapsto \frac{|x|}{1+x^2}.$$

Exercice 2. En étudiant le taux d'accroissement des fonctions données, montrer les résultats suivants :

1. L'application $h : x \mapsto |x-1|$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable en $x = 0$.
2. L'application $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable en $x = 2$.
3. L'application $g : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est dérivable en $x = 4$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. En utilisant le taux d'accroissement de f en un point, montrer que si f est impaire alors f' est paire.

Exercice 4. On considère les fonctions f, g et h définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ n'admet pas de limite.
2. f est-elle continue en 0 ? f est-elle dérivable en 0 ?
3. g est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?
4. Montrer que h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est-elle continue en 0 ?

Exercice 5. On considère $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et telle que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

1. On suppose que $\forall x > 0,\ \varphi'(x) \leq 0$. Montrer par l'absurde que $\forall x > 0,\ \varphi(x) \geq 0$.
2. On suppose que $\forall x > 0,\ \varphi'(x) < 0$. Montrer que $\forall x > 0,\ \varphi(x) > 0$.

Exercice 6. On considère l'application $f : [\pi, \frac{3\pi}{2}] \to [2,5]$ définie par

$$f(x) = -3\sin^2(x) + 5, \forall x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$$

1. Montrer que f admet une application réciproque que l'on notera f^{-1}.
2. Sans calculer $(f^{-1})'$, déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1}.
3. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{11}{4}$. Sans déterminer l'application réciproque f^{-1}, calculer $(f^{-1})'(\frac{11}{4})$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto (x^2+1)e^x,\ h : x \mapsto \frac{1}{x},\ \varphi : x \mapsto x\ln(x) \text{ et } f : x \mapsto x^2(1-x)^n.$$

Exercice 8. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dresser le tableau de variations de f. Tracer son graphe. Montrer que f admet un minimum local et un extremum local.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

1. Montrer à l'aide de quantificateurs que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.
2. Justifier que f admet un minimum global.
3. Calculer ce minimum.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |1 - x^2|$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ mais n'est pas dérivable en -1 et en 1.
2. Montrer que f admet un maximum local en 0 et des minima locaux en -1 et en 1.

2 Théorème de Rolle

Exercice 11. Montrer à l'aide de contre-exemples que chacune des hypothèses du théorème de Rolle est nécessaire.

Exercice 12. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème de Rolle, montrer que l'équation suivante admet au moins une solution dans $]0,1[$

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c. \quad (\star)$$

Exercice 13. Soit $f : [0;2] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0,2[$ et telle que

$$f(0) = f(1) = f(2) = 0.$$

1. Montrer qu'il existe c, d dans $[0,2]$ tels que $f'(c) = f'(d) = 0$.
2. Montrer qu'il existe e dans $[0,2]$ tel que $f''(e) = 0$.

3 Théorème des accroissements finis

Exercice 14. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

Exercice 15. Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Montrer que si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un extremum local en x_0.

Exercice 16. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$. On pourra séparer les cas $x = 0, x > 0$ et $x < 0$.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall x > 0, \exists c > 0 : f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c)).$$

Exercice 18. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[100, 101[$ pour montrer l'encadrement :

$$10 + \frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \frac{1}{20}.$$

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $K > 0 : \forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |f(0)| + K|x|$.
2. En déduire que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{1+|x|}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Calculer les limites des fonctions suivantes en 0 :

$$h : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}, \quad k : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{\tan(x)} \text{ et } \varphi : x \mapsto \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$.

1. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
2. On suppose de plus que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante et telle que $f(0) = 0$. Montrer que son application réciproque g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.
3. La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{x}{|x|}\sqrt{|x|}$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi(0) = 0$ vérifie-t-elle les mêmes hypothèses que f ?

Exercice 22. Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable sur $]a, b[$. Soit $x_0 \in]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $y_0 \in]x_0, b[$ tel que
$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + (x_0 - a)(x_0 - b)g'(y_0).$$
2. On considère la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie pour tout x dans $[a, b]$ par
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - (x - a)(x - b)g'(y_0).$$
Montrer qu'il existe $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ tels que $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$.
3. Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ tel que
$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}f''(\theta).$$

Exercice 23. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0, 1])$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, 1[$ telle que
$$f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f'(0) > 0 \text{ et } f'(1) < 0.$$

1. Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $f'(\gamma) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha]$, $f'(x) > 0$.
3. En utilisant le TAF sur $[0, \alpha]$, montrer que $f(\alpha) > 0$.
4. On suppose que $\forall x \in]0, 1[, f''(x) < 0$. Peut-il exister $\beta \in]0, 1[$ tel que $f(\beta) = 0$?
5. Déterminer le signe de f sur $]0, 1[$.

Exercice 24. Montrer que la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \cos(\sqrt{t})$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

4 Fonctions convexes

Exercice 25. Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant : « *Si une fonction est convexe sur un intervalle ouvert I alors elle est continue sur I.* »

On considère $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $I =]a, b[$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I. On définit la fonction $g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \forall x \in I \setminus \{x_0\}.$$

1. En utilisant la convexité de f, montrer que g est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.
   Indication : trois cas sont possibles : $x \leqslant y < x_0$, $x < x_0 < y$ et $x_0 < x \leqslant y$. Notons que lorsque $x \leqslant y < x_0$, on a $\lambda = \frac{x_0 - y}{x_0 - x} \in [0, 1]$.
2. (a) Justifier que $g(]x_0, b[)$ admet une borne inférieure $\ell \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que : $\forall \epsilon > 0, \exists c \in]x_0, b[: \forall x \in I \setminus \{x_0\}, x_0 < x \leqslant c \Rightarrow \ell \leqslant g(x) \leqslant \ell + \epsilon$.
   (c) En déduire que f est dérivable à droite en x_0.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ en utilisant l'égalité suivante :
   $$\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\epsilon(x) \text{ avec } \epsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell.$$
3. (a) Justifier que $g(]a, x_0[)$ admet une borne supérieure $\tilde{\ell} \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que : $\forall \epsilon > 0, \exists d \in]a, x_0[: \forall x \in I \setminus \{x_0\}, d \leqslant x < x_0 \Rightarrow \tilde{\ell} - \epsilon \leqslant g(x) \leqslant \tilde{\ell}$.
   (c) En déduire que f est dérivable à gauche en x_0.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ en utilisant l'égalité suivante :
   $$\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\tilde{\ell} + (x - x_0)\epsilon(x) \text{ avec } \epsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \tilde{\ell}.$$
4. Montrer que f est continue en x_0.
5. Peut-on en conclure que f est dérivable en x_0 ? Si non, donner un contre-exemple.
6. En étudiant la fonction $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par
   $$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$
   montrer que le résultat précédent ne s'applique pas sur un intervalle I fermé.
7. La réciproque du résultat montré à la question 1. est-elle vraie ?
   Indication : pour $x, y \in I \setminus \{x_0\}$ tels que $x < y$ on pourra fixer un $x_0 \in [x, y]$ et définir $\lambda \in [0, 1]$ tel que $x_0 = \lambda x + (1 - \lambda) y$.

5 Exercices supplémentaires

♣ **Exercice 26.** On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \arctan(x) + 1 - x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Dresser le tableau de variations de g.
2. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note h sa réciproque.
3. Calculer $g(0)$, $g(1)$, $h(1)$ et $h(\frac{\pi}{4})$.
4. Sans calculer h', déterminer le domaine de dérivabilité de h.
5. Déterminer h' et montrer que pour tout x dans le domaine de dérivabilité de h, on a

$$1 + h'(x) + \frac{1}{h^2(x)} = 0.$$

♣ **Exercice 27.**

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \text{sh}\,(x) + \ln(\text{ch}\,(x))$ est une bijection. Que vaut $f^{-1}(0)$?
2. Sans déterminer l'application réciproque f^{-1}, calculer $(f^{-1})'(0)$.

♣ **Exercice 28.** Dessiner le graphe de fonctions vérifiant :

1. f_1 admet deux minima locaux et un maximum local.
2. f_2 admet un minimum local qui n'est pas global et un maximum local qui est global.
3. f_3 admet une infinité d'extrema locaux.
4. f_4 n 'admet aucun extremum local.

♣ **Exercice 29.** Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}, \quad \lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}, \quad \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}.$$

♣ **Exercice 30.** En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

1. pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \leq x$;
2. pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $-x^2 \leq \cos(x) - 1 \leq 0$.

♣ **Exercice 31.**

1. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0,\ 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \text{ et } \forall x > 0,\ \frac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2. En déduire que les fonctions $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définies pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{et} \quad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

sont monotones.

3. Déterminer les limites en $+\infty$ de $\ln(f)$ et $\ln(g)$.

4. Déterminer les limites en $+\infty$ de f et g.

♣ **Exercice 32.** Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

1. On suppose dans cette question que φ est convexe sur I.
   (a) Soient $x, y, z \in I$ avec $x < z < y$. Montrer que $\dfrac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \dfrac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z}$.
   (b) En déduire que φ' est croissante sur I.
   (c) Montrer que la courbe représentative de φ reste au dessus de ses tangentes.
2. On suppose dans cette question que φ' est croissante sur I.
   (a) Soient $x, y, z \in I$ avec $x < z < y$. Montrer que $\dfrac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \dfrac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z}$.
   (b) En déduire que φ est convexe sur I.
   Indication : pour $x < y$ et $t \in]0, 1[$, on pourra utiliser la question $2.a)$ avec $z = tx + (1-t)y$.
3. On suppose que φ est de plus deux fois dérivable sur I. Que peut-on déduire des questions précédentes ?
4. Si on suppose que φ vérifie : $\forall a, x \in I$, $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a)$, peut-on en déduire que f est convexe sur I ?
5. On définit ici la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\psi(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que ψ est convexe. La fonction ψ est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$?