Université Aix-Marseille	2015–2016

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 2

Vendredi 20 novembre 2015

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices et les téléphones portables sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :
l'une comportant les exercices 1, 2 et 3, l'autre les exercices 4, 5 et 6

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Exercice 1. (Questions de cours - 6 points)

1. Énoncer et montrer le théorème de dérivation du produit de deux fonctions.
2. Calculer la dérivée de sin, en donnant une preuve.
3. Rappeler les ensembles de définition et les ensembles images des fonctions arcsin (arcsinus) et arccos (arccosinus).
4. Pour tout x dans l'ensemble de définition de arcsin, calculer $\cos(\arcsin x)$.
5. Donner (sans preuve) l'expression de la dérivée d'une fonction composée $g \circ f$, f et g étant deux fonctions dérivables. En déduire l'expression de $(f^{-1})'$, f étant une fonction bijective dérivable.
6. Calculer la dérivée de arcsin, en utilisant ce qui précède, et en précisant l'ensemble où cette dérivée est définie.

Exercice 2. (3 points) Donner les valeurs des expressions suivantes :

$$\begin{array}{llllll} (i) & \cos\left(\arccos \frac{3}{4}\right) & (ii) & \sin\left(\arccos \frac{3}{4}\right) & (iii) & \arccos\left(\cos \frac{\pi}{7}\right) \\ (iv) & \arcsin\left(\sin \frac{8\pi}{5}\right) & (v) & \arccos\left(\cos \frac{5\pi}{4}\right) & (vi) & \arccos\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) \end{array}$$

Exercice 3. (3 points)

1. Rappeler la formule qui lie $\cos\theta$ et $\cos 2\theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que si $-1 \leq x \leq 1$, alors $2x^2 - 1 \in [-1, 1]$
3. Montrer que si $0 \leq x \leq 1$, alors $2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$.
4. Montrer que si $-1 \leq x \leq 0$, alors $2 \arccos x = \arccos(1 - 2x^2) + \pi$.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice 4. (4 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \ln(1 + x^2) + x - 1.$$

1. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = 0$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire que c est unique.
3. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Calculer $f^{-1}(-1)$ et $f^{-1}(\ln 2)$, puis $(f^{-1})'(-1)$ et $(f^{-1})'(\ln 2)$.

Exercice 5. (3 points)

On considère l'application $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[\setminus\{0\}$, et calculer f'.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$? Si oui, donner la valeur de $f'(0)$.

Exercice 6. (3 points)

En intégrant par parties,

(a) donner une primitive de $x \mapsto x \ln x$ sur $]0, +\infty[$;

(b) donner une primitive de $x \mapsto \arctan x$ sur $\mathbb{R}$.