Université Aix-Marseille	2015–2016

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Examen deuxième session

Mercredi 22 juin 2016

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices et les téléphones portables sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Exercice 1. (Questions de cours -)

1. Soit I un intervalle, $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Montrer que fg est dérivable sur I, et $(fg)' = f'g + fg'$.
2. En utilisant un théorème adapté, et le fait que $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$, montrer que $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$.

Exercice 2. (points)

1. Rappeler l'ensemble de définition et l'ensemble des valeurs des fonctions arcsin, arccos et arctan.
2. Montrer que, pour tout x dans l'ensemble de définition de arccos, on a $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.
3. Simplifier l'expression $\sin(2\arccos x)$.
4. Donner l'ensemble de définition I de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Est-ce que f est continue sur I ?
5. Donner une primitive de f sur I (on pourra utiliser le changement de variable $x = \sin t$).

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice 3. (points)

1. On considère l'équation différentielle
$$y'' - 6y' + 9y = e^{2x}. \tag{E}$$
   (a) Donner la solution de l'équation homogène associée.
   (b) Donner une solution particulière de l'équation différentielle (E).
   (c) En déduire la solution générale de (E).
2. Donner une équation différentielle telle que sa solution générale est donnée par $c_1 e^x \sin 2x + c_2 e^x \cos 2x$, avec c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. (Suggestion : pour $\lambda \in \mathbb{C}$, a, $b \in \mathbb{R}$, $y(x) = e^{\lambda x}$ est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si...)

Exercice 4. (points)

Déterminer la solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) & = & -\dfrac{2x}{x^2+1} y(x) + \dfrac{1}{x(x^2+1)} \\ y(2) & = & 0. \end{array} \right.$$