Aix–Marseille Université

Introduction à l'Analyse

Parcours PEIP

PLANCHE 4 - "ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES"

Equations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'(x) - 3y(x) = 0$;
2. $y'(x) + x^2 y(x) = 0$;
3. $3y'(x) = \cos(x)y(x)$ avec $y(1) = -1$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'(x) + y(x) = \cos(x)$;
2. $y'(x) - 2xy(x) = x$;
3. $y'(x) + 3y(x) = 2e^{-x}$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'(x) + 2xy(x) = \cos(x)e^{-x^2}$;
2. $y'(x) + y(x)\tan(x) = \sin(2x)$;
3. $(1 + x^2)y'(x) + xy(x) = 2x$;
4. $y'(x) + \frac{y(x)}{\sqrt{1+x^2}} + 1 = 0$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle :

$$xy'(x) + (x - 1)y(x) = e^{-x}.$$

1. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = ae^{-x}$.
2. Trouver la solution générale de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Trouver les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $y(0) = -1$ puis vérifiant $y(1) = 0$ et enfin vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 5.

1. Résoudre sur les intervalles précisés les équations différentielles suivantes :
   (a) $2xy'(x) + y(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
   (b) $x(x - 1)y'(x) - (2x - 1)y(x) + x^2 = 0$ sur $]0, 1[$.
2. Résoudre les mêmes équations sur $\mathbb{R}$.

Equations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 0$;
2. $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$;
3. $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$;
4. $y''(x) - 4y(x) = 0$;
5. $9y''(x) - 6y'(x) = 0$;
6. $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$ avec $y(0) = 1 = y'(0) = 1$;
7. $2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$;
8. $9y''(x) - 6y'(x) + y(x) = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y''(x) + y'(x) + y(x) = x$;
2. $y''(x) - y(x) = e^{2x}$ avec $y(0) = y'(0) = 0$;
3. $y''(x) + y(x) = x + \cosh(x)$;
4. $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ sachant que $y(0) = y'(0) = 1$;
5. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{4x}$ avec $y(0) = y'(0) = 0$
   (on pourra chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = (Ax + B)e^{4x}$ où A, B sont des constantes) ;
6. $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = x^2e^{-2x}$
   (on pourra chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = P(x)e^{-2x}$ où P est un polynôme de degré 2)

Exercice 8.

1. Résoudre l'équation différentielle :
$$y''(x) + y'(x) = 1 + x^2 \qquad (E_1)$$
   en cherchant une solution particulière qui soit un polynôme du troisième degré.
2. On considère l'équation différentielle :
$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = (x^2 + 1)e^{-x}. \qquad (E_2).$$
   Montrer que f est solution de (E_2) si et seulement si g est solution de (E_1) où g est défini par $g(x) = e^x f(x)$ pour tout x. Puis résoudre (E_2).

Exercice 9. A l'aide du changement de variable $z(x) = y(x^2)$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$4xy''(x) + 2(1 + 2\sqrt{x})y'(x) - y(x) = 1.$$

Modélisation et équations différentielles non linéaires

Exercice 10. L'intensité $I(t)$ qui parcourt un circuit constitué d'une résistance R (ohms) et d'une auto-inductance L (henrys) vérifie l'équation différentielle $LI'(t) + RI(t) = E(t)$ où $E(t)$ désigne la *f.é.m* appliquée aux extrémités. Résoudre l'équation différentielle lorsque $E(t) = E_0$ constante, puis lorsque $E(t) = E_0 \sin(wt)$.

Exercice 11. On sait que l'accroissement d'une population donnée est proportionnelle à cette population. On sait de plus que cette population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 12. Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que le segment de chaque tangente compris entre le point de tangence et l'axe des abscisses est divisé en deux parties égales par le point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

Exercice 13. On a observé, dans une région donnée, l'évolution d'une population de rongeurs soumis aux attaques d'un prédateur. On note $N(t)$ le nombre de centaines de rongeurs dans cette région à un instant t, exprimé en années. Pour un certain modèle, on peut montrer que la fonction N vérifie l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = 2N(t) - \frac{3}{2}\big(N(t)\big)^2,$$

avec, comme condition initiale, $N(0) = 1$.

1. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par $h = \frac{1}{N}$.
2. Déterminer h puis N.
3. Comme se comporte la taille de la population de rongeurs lorsqu'on attend très longtemps ?

Exercice 14. Trouver toutes les applications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = f(1 - x).$$

Exercice 15. Soit l'équation différentielle (E) $y'(t) = y(t)(1 - y(t))$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $y(t) = C$ est-elle solution de (E) ?
2. Trouver deux constantes A et B telles que $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{1-y}$.
3. En déduire une primitive de $\dfrac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}$ (pour toute fonction y définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$).
4. Résoudre l'équation différentielle (E).

Exercice 16. Dans cet exercice, on se propose de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$(1 - x^2)\big(f(x)\big)^2 = xf'(x) + f(x). \tag{1}$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$xy'(x) + 1 = y(x) + x^2. \tag{2}$$
2. On considère f une solution strictement positive de l'équation (1) et on pose $u(x) = \frac{1}{f(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que u est solution de l'équation (2).
3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation (1).