Aix–Marseille Université	2019-2020

Introduction à l'Analyse

Parcours PEIP

PLANCHE 3 - LIMITES ET CONTINUITÉ

Remarque : Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.

1 Limites

Exercice 1. Vérifier à l'aide de la définition les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 1}(4x-2) = 2$.
2. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$.
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-3}{x-2} = 2$.
4. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5} = +\infty$.
5. $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

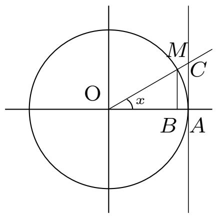
1. $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$.
2. $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-x+3}{2x^2+3x-1}$.
3. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$.
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$.
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)+2x}{\sin(3x)+5x}$.
6. $\lim_{x\to +\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)(x^3+1)}{x^2+1}$.
7. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x$.
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(\tan(x))^2}{\cos(2x)-1}$.

Exercice 3. En étudiant deux fonctions, montrez l'inégalité suivante, due à Neper :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1.$$

2 Continuité

♣ **Exercice 4.**



Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan, on note O l'origine, A l'intersection du cercle unité avec le demi-axe des abscisses positives et M le point du cercle unité tel que la demi-droite $[OA)$ forme un angle de mesure x avec le demi-axe des abscisses positives. On note encore B le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et C le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses et passant par A.

1. (a) En comparant l'aire du triangle OAM, l'aire de la portion de disque OAM et l'aire du triangle OAC, montrer que
$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\},\ \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$
   (b) En déduire la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{\sin(x)}{x}$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\sin(x)| \leq |x|$. Ce résultat est-il vrai sur $\mathbb{R}$ entier?
   (b) En déduire que sin est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Étudier la continuité de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$h(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Exercice 6. Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *Lipschitzienne* si:
$$\exists L > 0 \ : \ \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$
Montrer que toute fonction Lipschitzienne est continue.

♣ **Exercice 7.** Déterminer des nombres a, $b \in \mathbb{R}$ de sorte que la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ soit bijective de $[0, 1]$ dans $[a, b]$.

Exercice 8. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ \alpha & \text{si} \quad x = 2. \end{cases}$$
Pour quelle valeur de α l'application f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9. Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}$.

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Calculer $\lim_{x \to -1} f(x)$ et $\lim_{x \to 1} f(x)$.
3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qui soit égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{x^2})}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. f a-t-elle une limite à droite en 0?
2. f a-t-elle une limite à gauche en 0?
3. f admet-elle une limite en 0?

Exercice 11. *[Extrait partiel 2016]* On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x) + e^x & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

Exercice 12. *[Extrait partiel 2015]* On considère l'application $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$.

Exercice 13. *[Extrait seconde session 2016]* On considère l'application $f : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in I.$$

Déterminer le domaine de définition I de f. f est-elle continue sur I? Peut-on prolonger f par continuité aux bornes de I?

Exercice 14. *[Extrait partiel 2016]* On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}*.$$

Déterminer $f(0)$ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

♣ **Exercice 15.** Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si} \quad x > 4. \end{cases}$$

1. g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Dresser le tableau de variations de g.
3. En déduire que g est bijective et déterminer sa réciproque g^{-1}.

♣ **Exercice 16.** Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 5x + 2}{|x| - 2}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.
2. f est-elle prolongeable par continuité en $x = 2$?
3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et qui soit égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$?

♣ **Exercice 17.** On considère l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 1 - xE(\frac{1}{x}), \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

où l'on rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la partie entière de t notée $E(t)$ est l'unique nombre entier qui vérifie

$$E(t) \leq t < E(t) + 1.$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t - 1 < E(t) \leq t$.
2. En déduire que pour tout $x > 0$, on a $0 \leq f(x) < x$.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui, par quelle valeur?
4. Montrer que pour tout $x > 1$, on a $f(x) = 1$.
5. Calculer $f(1)$. La fonction f est-elle continue en 1?