Aix–Marseille Université 2022-2023

Introduction à l'Analyse

Parcours PEIP

PLANCHE 1 - LOGIQUE, ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Remarque : Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.

1 Logique

Exercice 1. Traduire à l'aide de quantificateurs les énoncés suivants.

1. Tout entier naturel est plus petit ou égal à son carré.
2. Si le produit de deux nombres réels est nul, alors un des deux facteurs est nul.
3. Tout ensemble non vide d'entiers naturels contient un plus petit élément.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes.

- A_1 : ≪ f est majorée ≫
- A_2 : ≪ f est bornée ≫.
- A_3 : ≪ f ne s'annule jamais ≫.
- A_4 : ≪ f est croissante. ≫

Exercice 3. ♣ Donner la négation des assertions ci-dessous puis déterminer si elles sont vraies ou fausses.

1. $\exists x \in \mathbb{R} : \ \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0.$
3. $\exists x \in \mathbb{R} : \ \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x.$

Exercice 4. ♣ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Donner la négation des énoncés suivants.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}, \ f(x) \leq 1.$
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \leq 0.$
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y).$
6. L'équation $\sqrt{x+1} = 3$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+.$

Exercice 5. Démontrer l'implication $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, x \leq y \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$. Ecrire sa contraposée et sa réciproque. Déterminer si sa réciproque est vraie.

Exercice 6. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Montrer les résultats suivants :
   (a) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.
   (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
   (c) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
2. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que
   (a) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c$.
   (b) $A \subset B^c \Rightarrow B \subset A^c$.
3. En utilisant un raisonnement par contraposée, montrer que si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$.

2 Applications

Exercice 7. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,-1])$, $f([-3,-1] \cup [-2,-1])$, $f^{-1}(]-\infty,-2])$, $f^{-1}(]1,+\infty[)$, $f^{-1}(\{9\})$, $f^{-1}(\{-4\})$ et $f^{-1}(]-\infty,-2] \cup]1,+\infty[)$.

Exercice 8. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère A, B deux sous-ensembles de E, et C, D deux sous-ensembles de F. Montrer les résultats suivants :

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Donner un exemple où cette inclusion est stricte.
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
5. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 9. On considère l'application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ x - \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \in]1,2] \\ x+1 & \text{si} \quad x \in]2,+\infty[. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.
2. Montrer que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) < f(x+1)$.
4. Que peut-on en conclure ?

Exercice 10.

1. Donner la définition de l'application valeur absolue.
2. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
3. Démontrer la première inégalité triangulaire.

Exercice 11. Donner un encadrement de la fonction f sur l'intervalle I lorsque

1. $f(x) = |x-3|$ et $I = [-5, 4]$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + x^2$ et $I = [0, 5]$.
3. $f(x) = \sqrt{2x+3}$ et $I = [1, 5]$.

Exercice 12. Résoudre sur leur domaine de validité les équations et inéquations suivantes.

- $|x+2| = \dfrac{4}{3}$.
- $|x| + 5 = -1$.
- $|x-2| = 2-x$.
- $|x+1| + |x| = 2$.
- $|x-1| < |x+1|$.
- ♣ $\left|\dfrac{3}{2} - x\right| = 3$.
- ♣ $|5-4x| = 3x-2$.
- ♣ $|x+2| + |x-1| = 4$.
- $\sqrt{7x-1} = \sqrt{x+7}$.
- $\sqrt{2x+1} = x-1$.
- $1 - x \leqslant \sqrt{x^2-1}$.
- ♣ $\sqrt{x(10-x)} = \sqrt{-3-x}$.
- ♣ $\sqrt{x^2-8} - 2x = -5$.
- ♣ $\sqrt{x+21} \leqslant \sqrt{2x+3}$.
- ♣ $\sqrt{x^2-4} \leqslant 2x+1$.
- ♣ $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$.
- $\dfrac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-1} = 2$.
- $-x+3 < x+1 < -3x+7$.
- ♣ $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{1}{x}$.
- ♣ $\dfrac{2x+1}{x+2} \geqslant 0$.
- ♣ $\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{2}{x^2+1} = \dfrac{4}{x^2-1}$.
- ♣ $\dfrac{1}{3} + 2x > 3 - \dfrac{x}{2}$.

3 Composition

Exercice 13. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$.
A-t-on égalité des applications $f \circ g$ et $g \circ f$?

♣ **Exercice 14.** [*Extrait devoir surveillé 2014*] On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{1+x^2} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Peut-on définir les applications $f \circ g$ et $g \circ f$? Si oui, les déterminer.

Exercice 15.

1. On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \dfrac{2^n}{n+1} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 3n \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

   Déterminer, lorsque c'est possible les applications suivantes : $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $k \circ f$ et $k \circ f \circ g$.

2. On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}.$$

   Montrer que $g \circ f = -g$. La composition $f \circ g$ existe-t-elle ?

4 Injectivité, surjectivité, bijectivité et application réciproque

Exercice 16. [*Extrait devoirs surveillés 2014-2015-2016*] Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives ou rien de cela. Le(s) cas échéant(s), déterminer explicitement l'application réciproque.

- $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
- $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
- $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$
- $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & |x|-x. \end{array}$
- $f_5 : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]1,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{e^x+1}{e^x-1}. \end{array}$
- $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}. \end{array}$

♣ $f_7 : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}. \end{array}$

♣ $f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3+2x}{2-x}. \end{array}$

♣ $f_9 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to &]0,+\infty[\\ n & \mapsto & \dfrac{1}{1+n^2}. \end{array}$

♣ $f_{10} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}. \end{array}$

♣ $f_{11} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x-4e^{-x}-2. \end{array}$

Exercice 17. Soit $f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2-1. \end{array}$ f est elle bijective ? Si oui, déterminer sa réciproque.

Exercice 18. Soit $f : \begin{array}{ccc}]-\infty,0] & \to & [1,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1}. \end{array}$ Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

♣ **Exercice 19.** [*Extrait devoir surveillé 2016*] On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$. f est-elle injective ?
2. Déterminer $f^{-1}(\{2\})$. f est-elle surjective ?
3. Montrer que la fonction $g : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est bijective.

Exercice 20. [*Extrait devoirs surveillés 2014-2015-2016*] Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives ou rien de cela. Le(s) cas échéant(s), déterminer explicitement l'application réciproque.

- $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
- $g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \mapsto & x_1^2 - 2x_2. \end{array}$
- $g_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \mapsto & 3x_1 + 4x_2. \end{array}$
- $g_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \mapsto & \dfrac{2x_1 - x_2}{4}. \end{array}$

♣ $g_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (e^y, x^3+y). \end{array}$

♣ $g_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto & n+m. \end{array}$

♣ $g_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto & n\times m. \end{array}$

♣ $g_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-2y, xy). \end{array}$

Exercice 21. Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$, vérifier que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ puis déterminer son application réciproque f^{-1}.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $I =]-\infty, 2]$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ et $I =]-2, +\infty[$.
3. ♣ $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$ et $I = [\frac{-3}{2}, +\infty[$.
4. ♣ $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ et $I = \mathbb{R}$.

Exercice 22. Soient A, B et C trois ensembles, $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications et $h = g \circ f : A \to C$ l'application composée.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors h est surjective.
3. Montrer que si h est injective, alors f est injective.
4. Montrer que si h est surjective, alors g est surjective.