Aix–Marseille Université 2022-2023

Introduction à l'Analyse

Parcours PEIP

PLANCHE 2 - FONCTIONS USUELLES ET LEURS RÉCIPROQUES

Remarque : Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.

1 Fonctions usuelles

Exercice 1. Donner les domaines de définition dans $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

- $f_1(x) = \sqrt{x-4}\sqrt{x+6}$.
- $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{|x+3|-|x|}$.
- $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-3}$.
- $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.
- $f_5(x) = \sqrt{x-x^2}$.
- $f_6(x) = \ln(x-\sqrt{3-x})$.
- $f_7(x) = \sqrt{1-|x-1|}$.
- $f_8(x) = \dfrac{\cos^2(x)-\sin(x)}{1+\sin(x)}$.
- $f_9(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$.
- $f_{10}(x) = \left(\ln(x)\right)^{\sin(x)}$.
- $f_{11}(x) = \dfrac{1}{\cos(2x)}$.

♣ $f_{12}(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

♣ $f_{13}(x) = \dfrac{2x}{x^2-4} - \dfrac{2}{x^2-2x}$.

♣ $f_{14}(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$.

♣ $f_{15}(x) = \sqrt{-1-x^2}$.

♣ $f_{16}(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sin(4x)}$.

♣ $f_{17}(x) = \sqrt{\cos(2x)}$.

♣ $f_{18}(x) = \dfrac{1}{\tan(\cos(\sqrt{x}))}$.

Exercice 2. Montrer que $\forall x > 0, \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x, y > 0$, on a $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
2. En déduire que pour tout $\alpha, \beta > 1$, on a $\sqrt{\ln(\alpha)\ln(\beta)} \leqslant \ln(\sqrt{\alpha\beta})$.

Exercice 4. Montrer les formules suivantes $\forall p, q \in \mathbb{R}$

1. $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$.
2. $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$.
3. ♣ $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$.
4. ♣ $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.
2) $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{6} - x)$
3) $\cos(3x) = \sin(x)$.
4) $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$.
5) $\cos(3x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
6) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

Exercice 6.

1. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, donner trois formules pour $\cos(2x)$ et une formule pour $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
2. Montrer, pour certaines valeurs de x qui seront précisées, que $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
3. Donner une expression de $\tan(x+y)$ et $\tan(x-y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$ en précisant les valeurs de x et y qui conviennent.
4. Pour tout x qui convient, donner une formule pour $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $\tan(3x) = \tan(x)$.
2) $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = -1$.
3) $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.
4) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan(x)}$.
5) $2\sin^2(x) - 3\sin(x) - 2 = 0$.
6) $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$.

Exercice 8.

1. Linéariser les polynômes trigonométriques suivants :
$$P(x) = 1 + \cos^2(x) \text{ et } Q(x) = \cos^4(x) + 2\sin^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) = 4\sqrt{3}\cos^2(x) - 6\cos(x)$.

2 Applications réciproques

Exercice 9. Calculer

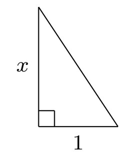
1) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right)$
2) $\arccos\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right)$
3) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$
4) $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$

Exercice 10. Calculer pour tout x tel que ce soit défini

1) $\cos\big(\arcsin(x)\big)$.
2) $\cos\big(\arctan(x)\big)$.
3) $\tan\big(\arccos(x)\big)$.
4) $\sin\big(\arccos(x)\big)$.
5) $\sin\big(\arctan(x)\big)$.
6) $\tan\big(\arcsin(x)\big)$.

Exercice 11. Montrer que, en posant $t = \tan(\frac{x}{2})$ et pour des valeurs de x que l'on précisera, on a
$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2} \text{ et } \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Exercice 12.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$. *Indication : considérer le triangle* 

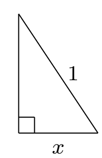
2. Soient $a, b > 0$ tels que $ab < 1$.
   (a) Montrer que $\arctan(a) + \arctan(b) \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
   (b) Montrer que $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$.
3. Simplifier l'expression $2\arctan(\frac{1}{4}) + \arctan(\frac{1}{7}) + 2\arctan(\frac{1}{13})$.
4. Résoudre l'équation $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

♣ **Exercice 13.**

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x),\ \ \mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) \text{ et } \mathrm{th}(2x) = \frac{2\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)}.$$
4. En utilisant les questions 1), 2) et 3), donner deux autres formules pour $\mathrm{ch}(2x)$.
5. Montrer que, en posant $t = \mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)$ et pour des valeurs de x que l'on précisera, on a
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

♣ **Exercice 14.** Montrer que, $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Indication : on pourra séparer la preuve en cinq cas : $x = -1, 0, 1$, $x \in]0, 1[$ *puis* $x \in]-1, 0[$. *Dans le cas où* $x \in]0, 1[$, *on pourra utiliser le triangle rectangle ci-contre.*



♣ **Exercice 15.**

1. Montrer que, pour tout $x \in [1, \infty[$, on a $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}\big(\mathrm{argsh}(x)\big) = \sqrt{x^2 + 1}$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\mathrm{ch}\big(\mathrm{argth}(x)\big) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\mathrm{sh}\big(\mathrm{argth}(x)\big) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

♣ **Exercice 16.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\alpha_x = \arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$.

1. Montrer que $0 \leq \alpha_x < \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que $1 + \tan^2(\alpha_x) = \mathrm{ch}^2(x)$.
3. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a $\arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right) = \arctan\big(\mathrm{sh}(x)\big)$.