Aix–Marseille Université	2019-2020

Introduction à l'Analyse

Parcours PEIP

PLANCHE 4 - DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Remarque : Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.

1 Dérivées

Exercice 1. Les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}$ sont-elles dérivables en 0?

$$f_1 : x \mapsto |x|, \quad f_2 : x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \text{ et } f_3 : x \mapsto \frac{|x|}{1+x^2}.$$

Exercice 2. En revenant à la définition, montrer les propriétés suivantes :

1. L'application $h : x \mapsto |x-1|$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable en $x = 0$.
2. L'application $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable en $x = 2$.
3. L'application $g : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est dérivable en $x = 4$.
   Indication : on pourra utiliser, après l'avoir démontrée, la majoration $\forall x \in \mathbb{R}_+, \dfrac{1}{4(\sqrt{x}+2)^2} \leq \dfrac{1}{16}$.

Exercice 3. Donner le domaine de définition et de dérivabilité des applications suivantes puis calculer leurs dérivées.

$f_1 : x \mapsto \dfrac{x^3+2x+3}{x^2+2x+7}$

$f_2 : x \mapsto \ln(2x+9)$

$f_3 : x \mapsto \arcsin(3x+9)$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x}\arccos(2x+1)$

$f_5 : x \mapsto \sqrt{x^2+2x-1}\,\arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

$f_6 : x \mapsto \ln(\arctan(3x+1))$

♣ $f_7 : x \mapsto \exp(\sqrt{x^2-1})$

♣ $f_8 : x \mapsto \arccos(\sin(x))$

♣ $f_9 : x \mapsto \ln(3-x^2-2x) + \arctan(\sqrt{3-x})$

♣ $f_{10} : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

Exercice 4. On considère les fonctions f, g et h définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

On admettra que les fonctions $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ *et* $x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ *n'admettent pas de limite en* 0. *Ces résultats seront démontrés au second semestre à l'aide de suites.*

1. f est-elle continue en 0? f est-elle dérivable en 0?
2. g est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est-elle continue en 0?

Exercice 5. On considère l'application $f : [\pi, \frac{3\pi}{2}] \to [2, 5]$ définie par

$$f(x) = -3\sin^2(x) + 5, \forall x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$$

1. Montrer que f admet une application réciproque que l'on notera f^{-1}.
2. Sans calculer $(f^{-1})'$, déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1}.
3. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{11}{4}$.
4. Sans déterminer l'application réciproque f^{-1}, calculer $(f^{-1})'(\frac{11}{4})$.

Exercice 6.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{sh }(x) + \ln(\text{ch }(x))$ est une bijection. Que vaut $f^{-1}(0)$?
2. Sans déterminer l'application réciproque f^{-1}, calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 7. En dérivant, montrer les égalités suivantes

1. Pour tout x dans $]0, +\infty[$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
2. Pour tout x dans $]0, 1[$, $2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x - 1) = \frac{\pi}{2}$.
3. ♣ Pour tout x dans $]-\infty, 0[$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.
4. ♣ Pour tout x dans $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\arcsin(x)$.
5. ♣ Pour tout x dans $]0, +\infty[$, $x\text{argsh}\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right) = x\ln(x)$.

♣ **Exercice 8.** [*Extrait Examen janvier 2018*] On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \arctan(x) + 1 - x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Dresser le tableau de variations de g.
2. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note h sa réciproque.
3. Calculer $g(0)$, $g(1)$, $h(1)$ et $h(\frac{\pi}{4})$.
4. Sans calculer h', déterminer le domaine de dérivabilité de h.
5. Déterminer h' et montrer que pour tout x dans le domaine de dérivabilité de h, on a

$$1 + h'(x) + \frac{1}{h^2(x)} = 0.$$

♣ **Exercice 9.**

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq x$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $e^x \geq \frac{x^n}{n!}$.

3. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

2 Primitives

Exercice 10. À l'aide d'une intégration par parties, calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes : $f_1 : x \mapsto x^2 e^x$, $f_2 : x \mapsto x\cos(x)$, $f_3 : x \mapsto \ln(x)$, $f_4 : x \mapsto x^2 \ln(x)$, $f_5 : x \mapsto x \arctan(x)$, $f_6 : x \mapsto \arcsin(x)$ et $f_7 : x \mapsto \arcsin^2(x)$.

Exercice 11. À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

•$f_1 : x \mapsto e^x \cos(x)$ •$f_2 : x \mapsto \sin(x)\,\mathrm{sh}\,(x)$ •$f_3 : x \mapsto x^2 \sin(2x)$ ♣$f_4 : x \mapsto e^x \sin(x)$ ♣$f_5 : x \mapsto (x+1)^2 e^{-x}$.

Exercice 12. Calculer toutes les primitives des fractions rationnelles suivantes :

1. $R_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

2. $R_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2 + 1)}$

3. $R_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2 + 2x + 3)}$

4. $R_4 : x \mapsto \dfrac{x^3 + x^2 - x}{x^2 + x - 6}$.

Exercice 13.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{t^4}{1+t^2} = t^2 - 1 + \dfrac{1}{1+t^2}$.

2. En posant le changement de variables $t = \tan(x)$, en déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(x)dx$.

Exercice 14.

1. Montrer que pour tout t dans $[0, 2]$, $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$.

2. À l'aide du changement de variables $t = \sqrt{x}$, calculer l'intégrale suivante:

$$J = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx.$$

Indication : on pourra remarquer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Exercice 15.

1. Montrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $t^2+t+1=\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$.

2. En déduire la valeur de $I=\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t^2+t+1}dt$ en posant le changement de variables $X=\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$.

3. Chercher $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $\forall t\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{t+1}{t(t^2+t+1)}=\dfrac{a}{t}+\dfrac{bt+c}{t^2+t+1}$.

4. En posant le changement de variables $t=e^x$, déduire des questions précédentes la valeur de $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1}dx$.

Exercice 16.

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$.

2. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\sin(3x)=\sin(x)(4\cos^2(x)-1)$.

3. Chercher $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $\forall t\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$, $\dfrac{1}{(2t-1)(2t+1)}=\dfrac{a}{2t-1}+\dfrac{b}{2t+1}$.

4. En posant le changement de variable $t=\cos(x)$, calculer l'intégrale suivante

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos(2x)}{\sin(3x)}dx.$$

Exercice 17. Calculer à l'aide des changements de variables proposés les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos(x)}dx$ avec $t=\tan(\frac{x}{2})$.

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(\sqrt{4-x^2})^3}dx$ avec $t=\arcsin(\frac{x}{2})$.

3. ♣ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)}dx$ avec $t=\tan(\frac{x}{2})$.

4. ♣ $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{x(x^3+1)^2}dx$ avec $t=x^3+1$.

Indication : on pourra utiliser les résultats suivants démontrés dans la Planche 2, Exercice 11 :

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \textit{en posant } t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\ \textit{on a}\ \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}\ \textit{et}\ \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$