Chapitre 3

Endommagement et changement d'échelle

Les changements d'échelle, ou passages micro-macro, dans le contexte de l'endommagement, font intervenir deux aspects complémentaires que sont, d'une part, la description du comportement macroscopique du VER, en particulier de son comportement élastique, à partir de celui des constituants et d'un état donné de microdéfauts (microfissures, microvides, cavités, etc.), et d'autre part les phénomènes d'évolution eux-mêmes (mécanismes de décohésion, de micro-rupture, de fissuration, de cavitation etc., mais aussi de frottement sur les fissures), accompagnés ou non de plasticité à l'échelle locale et de leurs conséquences au niveau macroscopique.

Deux types de comportement et d'endommagement sont plus particulièrement étudiés dans ce qui suit : soit un endommagement à caractère fragile dans un matériau par ailleurs élastique, soit une situation ductile, dans laquelle endommagement (croissance des cavités) et déformation plastique sont intimement liés.

3.1. Homogénéisation des milieux élastiques multifissurés

On aborde ici successivement la microfissuration des milieux homogènes et isotropes puis la prise en compte des effets de fermeture et de frottement des microfissures. Par rapport au cas des matériaux multiphasés ou contenant des inclusions, le cas des microfissures présente deux difficultés particulières. D'abord, la densité des fissures ne peut être assimilée à une fraction volumique de phase inclusionnaire, puisqu'elles n'ont pas de volume. Ensuite, les solutions élaborées pour les inclusions doivent être adaptées au moyen de deux passages à la limite successifs : soit transformer l'inclusion ellipsoïdale en une plaquette inclusionnaire d'excentricité nulle puis faire tendre son module d'élasticité vers 0,

Chapitre rédigé par Jean-Louis CHABOCHE, Pierre SUQUET et Jacques BESSON.

soit d'abord faire tendre le module vers 0 (cavité) puis l'excentricité vers 0. Par ailleurs, les champs de contraintes locaux, au voisinage des fissures, sont très perturbés, singuliers, et il sera important de pouvoir les évaluer, tout en tenant compte des interactions pour, en particulier, obtenir les facteurs d'intensité des contraintes susceptibles de servir à décrire la propagation des fissures.

3.1.1. *Approche sans interactions*

La démarche suivie ici est celle de [KAC 94], mais de nombreux autres travaux existent dans ce domaine : [BEN 89], [BUI 87], [CHU 91], [GON 89], [HAS 88], [HOE 79], [HOR 83], [JU 92], [OCO 76]. On examine d'abord le problème d'homogénéisation, puis les solutions locales (problème de localisation) afin d'écrire des lois d'endommagement à cette échelle.

Les microfissures constituent un type particulier d'inhomogénéité : elles n'occupent aucun volume, les champs de contraintes dans leur voisinage sont singuliers et les effets d'orientation sont importants. Dans ce qui suit, on utilisera comme définitions de la densité de fissures :

$$\rho = \frac{1}{|A|} \sum_i \left(l^i\right)^2 \qquad \text{et} \qquad \rho = \frac{1}{|V|} \sum_i \left(l^i\right)^3 , \tag{3.1}$$

respectivement en deux dimensions (fissures linéaires de longueur $2\,l^i$ dans une aire représentative A) et en trois dimensions (fissures circulaires de rayon l^i dans un volume représentatif V). Ce paramètre scalaire sera généralisé plus loin pour décrire les effets d'orientation.

Le champ des déformations dans un solide contenant des fissures se décompose en une partie régulière et une partie singulière :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2} \sum_i \left(\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{b}\right)^i \delta(S^i) , \tag{3.2}$$

où $\boldsymbol{S}_0$ est la souplesse de la matrice, supposée uniforme, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-$ le saut de déplacement sur la fissure i, $\boldsymbol{n}$ la normale au plan de fissure (supposée rectiligne ou plane), $\delta(S^i)$ est la fonction Dirac concentrée sur la section S^i de la fissure (dérivée d'une fonction échelon unité, $\delta(S^i)$ a la dimension de l'inverse d'une longueur). L'introduction de microfissures ne change pas la définition des contraintes macroscopiques (en 3D) :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}V . \tag{3.3}$$

Par contre, la déformation moyenne, s'obtenant par intégration de (3.2), fait intervenir un terme de saut :

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{S}_0 : \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2\,|V|} \sum_i \int_{S^i} (\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{b})^i \, \mathrm{d}S$$
$$= (\boldsymbol{S}_0 + \Delta \boldsymbol{S}) : \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \widetilde{\boldsymbol{S}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} \,, \quad (3.4)$$

qui, pour des fissures planes, se simplifie en :

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{S}_0 : \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2\,|V|} \sum_i \left(\langle \boldsymbol{b} \rangle \otimes \langle \boldsymbol{n} \rangle + \langle \boldsymbol{n} \rangle \otimes \langle \boldsymbol{b} \rangle \right)^i S^i \,. \quad (3.5)$$

Toujours dans le cas linéaire, le tenseur ouverture de fissure $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ exprime le « comportement local » de la fissure, c'est-à-dire la relation entre un vecteur contrainte $\boldsymbol{t}$, supposé appliqué uniformément sur les faces de la fissure, et le vecteur ouverture de fissure (C.O.D., pour *crack opening displacement*) moyen :

$$\langle \boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \,. \quad (3.6)$$

Dans le cas à deux dimensions isotrope, c'est-à-dire pour une fissure dans un solide infini élastique isotrope ou pour un solide isotrope contenant des fissures d'orientations aléatoires, le tenseur $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ est proportionnel au tenseur unité, ce qui signifie que le mode normal et le mode de cisaillement sont découplés :

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{\pi\, l}{E_0'} \boldsymbol{i} \qquad \text{avec} \qquad E_0' = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \,. \quad (3.7)$$

En trois dimensions, pour une fissure circulaire, on a :

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{32\, l}{3\pi E_0} \frac{1 - \nu_0^2}{2 - \nu_0} \left(\boldsymbol{i} - \frac{\nu_0}{2} \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \right) \,. \quad (3.8)$$

Les solutions s'expriment très simplement à partir du potentiel élastique complémentaire découlant de (3.5) :

$$\psi = \frac{1}{2} \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \widetilde{\boldsymbol{S}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{S}_0 : \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2\,|V|} \sum_i \left(\boldsymbol{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \langle \boldsymbol{b} \rangle \right)^i S^i$$
$$= \psi_0(\overline{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta \psi \,. \quad (3.9)$$

Pour le milieu initial isotrope non endommagé, on a bien sûr :

$$\psi_0(\overline{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1 + \nu_0}{2E_0} \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu_0}{2E_0} \left(\mathrm{tr}\, (\overline{\boldsymbol{\sigma}}) \right)^2 \,, \quad (3.10)$$

où, dans le cas bidimensionnel, E_0 est remplacé par E_0'. L'ouverture moyenne de fissure $\langle \boldsymbol{b} \rangle$ dépend linéairement de la contrainte macroscopique et l'on obtient donc, avec (3.6) et (3.7) :

$$\Delta\psi = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \Delta\boldsymbol{S} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{2\,|A|}\sum_i (l\,\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{\mathcal{B}}\otimes\boldsymbol{n})^i & \text{en 2D,} \\ \Delta\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{2\,|V|}\sum_i (S\,\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{\mathcal{B}}\otimes\boldsymbol{n})^i & \text{en 3D.} \end{cases} \tag{3.11}$$

Le tenseur densité de fissures $\boldsymbol{\alpha}$, de rang deux, a été introduit initialement par [VAK 71] et permet de traduire l'effet prépondérant des microfissures, si l'on recherche l'effet du premier ordre. Il est défini de façon naturelle dans le cas bidimensionnel, pour lequel les vecteurs $\langle \boldsymbol{b}^i \rangle$ et $\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}^i$ sont colinéaires, donnés par (3.6) et (3.7) ; en reportant dans (3.11), on trouve :

$$\Delta\psi = \frac{1}{2}\frac{\pi}{E_0'}\,(\overline{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\overline{\boldsymbol{\sigma}}) : \boldsymbol{\alpha} \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{|A|}\sum_i (l^2\,\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})^i\,. \tag{3.12}$$

Ce tenseur généralise la densité de fissures ρ et tient compte, au premier ordre, des effets d'orientation de ces fissures. Puisque $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = 1$, on a évidemment $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{|A|}\sum_i (l^i)^2 = \rho$ et $\boldsymbol{\alpha}$ se ramène à la densité scalaire ρ dans le cas isotrope (répartition aléatoire de l'orientation des fissures), avec $\boldsymbol{\alpha} = \rho\,\boldsymbol{i}/2$. En tridimensionnel, des tenseurs d'ordre supérieur doivent intervenir ; par exemple, dans le cas isotrope, on trouve, d'après (3.7) [KAC 94] :

$$\Delta\psi = \frac{16}{3\,E_0}\frac{1-\nu_0^2}{2-\nu_0}\left[(\overline{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\overline{\boldsymbol{\sigma}}) : \boldsymbol{\alpha} - \frac{\nu_0}{2}\,\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{1}{|V|}\sum_i \left(l^3\,\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\right)^i : \overline{\boldsymbol{\sigma}}\right]$$
$$\text{avec} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{|V|}\sum_i (l^3\,\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})^i\,. \tag{3.13}$$

Même dans le cas sans interaction, si la matrice est anisotrope ou si les fissures sont « contraintes » par la condition de fermeture (cas intervenant sous des chargements compressifs), ou encore pour des fissures remplies d'un fluide compressible [KAC 94], l'emploi d'un tenseur de rang deux s'avère insuffisant. Une alternative consiste alors à utiliser un tenseur de rang quatre, $\boldsymbol{\Omega}$. En bidimensionnel, par exemple :

$$\Delta\psi = \frac{\pi}{E_0'}\,\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Omega} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{|A|}\sum_{k,i} (l^k)^2\,\boldsymbol{n}^k\otimes\boldsymbol{\omega}^{ki}\otimes\boldsymbol{n}^i\,, \tag{3.14}$$

où $\boldsymbol{\omega}^{ki}$ est un tenseur d'influence de rang deux qui sera défini plus loin (équation (3.39)). Notons que l'homogénéisation périodique permet de démontrer que l'opérateur d'effet du dommage associé a une répartition quelconque de

microfissures (reproduit par périodicité) est nécessairement un tenseur d'ordre quatre qui s'applique sur le tenseur des rigidités élastiques initial du milieu [CHA 82]. Dans ce cas, la méthode tient compte automatiquement des interactions, mais elle est évidemment lourde à mettre en œuvre si un grand nombre de microfissures est nécessaire pour reproduire un VER satisfaisant.

Pour ce qui est des solutions élémentaires, en bidimensionnel, dans le cas de fissures d'orientations aléatoires, en introduisant (3.12) dans (3.9) et (3.10) on trouve le potentiel élastique :

$$\begin{aligned}\psi(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\alpha}) &= \psi_0(\overline{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{\pi}{2E_0'}\rho \;\; \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{1+\nu_0+\pi\rho}{2E_0'}\,\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu_0}{2E_0'}\left(\mathrm{tr}\,(\overline{\boldsymbol{\sigma}})\right)^2 , \end{aligned} \tag{3.15}$$

d'où l'on tire les modules effectifs :

$$E' = \frac{E_0'}{1+\pi\rho} \qquad \text{et} \qquad \nu = \frac{\nu_0}{1+\pi\rho}\,. \tag{3.16}$$

Pour des fissures toutes parallèles, perpendiculaires à l'axe $\boldsymbol{e}_1$, mais dont les centres sont distribués de façon aléatoire, on a $\boldsymbol{\alpha} = \rho\,\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1$ et le potentiel s'écrit :

$$\psi(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\alpha}) = \psi_0(\overline{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{\pi}{E_0'}\rho\,(\boldsymbol{e}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot (\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{e}_1)\,, \tag{3.17}$$

si bien que les modules effectifs deviennent :

$$E' = \frac{E_0'}{1+2\pi\rho} \qquad \text{et} \qquad G_{12} = \left(\frac{1}{G_0} + \frac{2\pi\rho}{E_0'}\right)^{-1}. \tag{3.18}$$

Dans un cas quelconque, on pourra toujours définir les directions principales du tenseur $\boldsymbol{\alpha}$ et donc les modules d'élasticité correspondants. En tridimensionnel, pour des fissures circulaires d'orientations aléatoires, avec $\boldsymbol{\alpha} = \rho\,\boldsymbol{i}/3$, on trouve [KAC 94] :

$$\begin{gathered}\frac{E}{E_0} = \left[1 + \frac{32}{9}\frac{1-\nu_0^2}{2-\nu_0}\left(1 - \frac{3\,\nu_0}{10}\right)\rho\right]^{-1}, \\ \frac{G}{G_0} = \left[1 + \frac{32}{9}\frac{1-\nu_0}{2-\nu_0}\left(1 - \frac{\nu_0}{5}\right)\rho\right]^{-1}, \quad \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{E}{E_0}\left(1 + \frac{16}{45}\frac{1-\nu_0^2}{2-\nu_0}\,\rho\right).\end{gathered} \tag{3.19}$$

La même méthode peut s'appliquer à une matrice orthotrope [KAC 94].

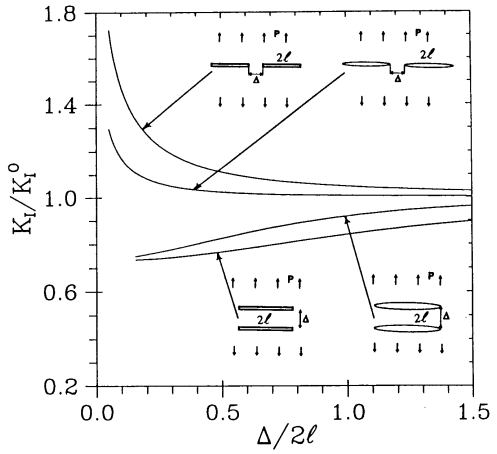


Figure 3.1. *Effets d'interaction dans des configurations 2D et 3D similaires [KAC 94]*

3.1.2. *Prise en compte des interactions*

Pour des fissures en interaction, le problème devient plus complexe et l'on utilise donc des méthodes approchées. Celles-ci se réduisent à l'analyse d'une fissure isolée placée dans une sorte d'environnement effectif. Rappelons d'abord de quels effets d'interaction il s'agit. On distingue deux cas, suivant les positions respectives des pointes de fissure (donc des centres), qui sont plus facilement visualisés avec des fissures toutes parallèles. La figure 3.1 montre ces effets sur le facteur d'intensité des contraintes :

- l'effet « d'écrantage » (*shielding*), ou de déchargement, correspond à des fissures empilées : toutes choses égales par ailleurs, il y a diminution du facteur d'intensité des contraintes quand les fissures sont rapprochées ;
- l'effet d'amplification correspond à des fissures alignées, pointes en vis-à-vis, avec une augmentation forte du facteur d'intensité des contraintes lorsque les pointes se rapprochent, mais avec un domaine d'influence moins étendu.

Suivant les positions relatives des fissures, on pourra avoir l'un ou l'autre effet lorsque la répartition des centres (et des longueurs) est peu aléatoire (fissures alignées et empilées). Par contre, lorsque les positions des centres sont aléatoires, les deux effets se compensent et les solutions avec interaction sont très voisines de celles sans interaction, comme on le montrera plus loin. Pour tenir compte des interactions, on distingue deux types de méthodes approchées, dites « de milieu effectif » et « de champ effectif ». Dans les premières, la fissure

est placée dans une matrice dont le comportement dépend de la présence des autres fissures, ce qui inclut le schéma autocohérent, le schéma différentiel et diverses variantes. Dans l'autre type de méthodes, la fissure est placée dans la matrice non endommagée mais soumise à un champ de contraintes qui tient compte de la présence des autres fissures (et qui n'est pas nécessairement le même pour toutes). La version la plus simple, dans laquelle le champ effectif est homogène et égal à la contrainte macroscopique, est la méthode de Mori et Tanaka [MOR 73]. Après une brève description de certaines de ces approches, on présentera ci-dessous une méthode approchée plus complète, mais qui exige des calculs numériques [KAC 94].

3.1.2.1. *Méthode autocohérente*

Pour un milieu fissuré, cette méthode a d'abord été employée pour des fissures d'orientations aléatoires [BUD 76], puis pour des fissures parallèles ou avec symétrie cylindrique [HOE 79]. Appliquée ici dans le cas d'orientations aléatoires, elle pourrait être généralisée pour d'autres répartitions en partant de la formulation donnée au paragraphe 5.3.5.3 du chapitre 5 du tome 1 et en effectuant les passages à la limite en termes de rigidité et d'excentricité nulles pour l'inclusion. La façon la plus simple de présenter cette méthode est d'employer l'expression générale (3.9) du potentiel élastique. Les vecteurs $\langle \boldsymbol{b} \rangle$ dépendent des constantes élastiques ; en accord avec l'idée de base de la méthode autocohérente, ces constantes sont alors prises comme les constantes effectives. Dans le cas bidimensionnel, en remplaçant E'_0 dans (3.12a) par le module effectif E', on trouve :

$$\begin{aligned}\psi(\overline{\boldsymbol{\sigma}}) &= \psi_0(\overline{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{\pi}{2E'}\,\rho\,\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} \\ &= \left(\frac{1+\nu_0}{2E'_0} + \frac{\pi\rho}{2E'}\right)\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu_0}{2E'_0}(\mathrm{tr}\,(\overline{\boldsymbol{\sigma}}))^2\,, \qquad (3.20)\end{aligned}$$

à identifier avec le potentiel initial (3.10) dans lequel E_0 et ν_0 sont remplacés par E' et ν. On obtient deux équations pour les deux constantes, qui donnent :

$$E' = E'_0\,(1 - \pi\rho) \qquad \text{et} \qquad \nu = \nu_0(1 - \pi\rho)\,. \qquad (3.21)$$

Pour les faibles valeurs de ρ, ces formules coïncident avec celles du cas sans interaction. Par contre, pour des densités de fissures plus fortes, elles prédisent une réponse beaucoup moins résistante et l'on observe une « densité de coupure » $\rho = 1/\pi$ pour laquelle le module devient nul. On montre que les résultats sont analogues dans le cas tridimensionnel [KAC 94], avec cette fois une densité de coupure $\rho = 9/16$.

3.1.2.2. *Schéma différentiel*

L'analyse est faite de façon incrémentale, en augmentant la densité de fissures de $\mathrm{d}\rho$, et le comportement effectif est recalculé à chaque pas. On en déduit des équations différentielles pour les constantes effectives, dont les conditions initiales sont $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_0$ pour $\rho = 0$. Dans le cas des orientations aléatoires on a deux équations, $E(\rho)$ et $\nu(\rho)$, qui sont couplées dans le cas tridimensionnel mais découplées en bidimensionnel. Dans ce dernier cas, en changeant E'_0 dans (3.16) par le module courant E', ρ par $\mathrm{d}\rho$, et en linéarisant pour de petits $\mathrm{d}\rho$ on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}E'}{E'} = -\pi\,\mathrm{d}\rho\,, \tag{3.22}$$

ce qui donne :

$$E' = E'_0\,\mathrm{e}^{-\pi\rho} \qquad \text{et} \qquad \nu = \nu_0\,\mathrm{e}^{-\pi\rho} \tag{3.23}$$

en procédant de même pour le coefficient de Poisson. Pour des fissures parallèles, on suit la même démarche à partir de (3.18) et l'on trouve, pour le module dans la direction perpendiculaire aux fissures :

$$E' = E'_0\,\mathrm{e}^{-2\pi\rho}\,. \tag{3.24}$$

A la différence de la méthode précédente, celle-ci ne présente pas de densité de coupure avec annulation du module. La décroissance de celui-ci est cependant trop forte par rapport aux expériences numériques que l'on donnera plus loin.

3.1.2.3. *Méthode de champ effectif*

Elle consiste à placer la fissure dans le milieu non endommagé mais soumis à un champ de contraintes effectif qui, en général, ne coïncide pas avec le champ appliqué au loin ; cette différence permet de tenir compte des effets d'interaction. La condition d'autocohérence est écrite pour ce champ effectif. La méthode présente l'avantage sur les précédentes de tenir compte des positions respectives des fissures et de la structure des champs de contraintes qui leur sont associés, ce qui introduit de façon plus précise les effets d'interaction mécanique. Par exemple, les effets d'écrantage et d'amplification sont très bien reproduits pour des fissures parallèles périodiques, en distinguant en particulier les arrangements en rectangle et en losange. Pour des centres de fissures distribués de façon aléatoire, au contraire, cette méthode donne des résultats qui coïncident avec ceux de l'approximation des fissures sans interaction [KAN 80], [KAN 83]. La méthode de Mori et Tanaka est une version simplifiée des méthodes de champ effectif ; elle a été appliquée à des solides fissurés en deux [BEN 86] et en trois [KAN 80] dimensions.

3.1.2.4. *Méthodes basées sur les bornes de Hashin et Shtrikman*

D'une certaine manière, chacune des méthodes évoquées plus haut peut être considérée comme un cas particulier des méthodes de bornes développées à partir des travaux de Hashin et Shtrikman [HAS 63], puis de Willis [WIL 77], et qui permettent d'aboutir à des solutions plus élaborées. Notons que la borne inférieure en rigidité est ici sans intérêt puisque, comme celle de Reuss, elle conduit à une rigidité nulle. On se référera au chapitre 5 du tome 1, principalement consacré aux matériaux multiphasés, pour en utiliser les résultats dans le cas limite où la phase 2 (l'inclusion ellipsoïdale) est remplacée par un milieu sans rigidité, tandis que son excentricité tend vers 0.

Commençons par la solution au premier l'ordre [WIL 77], qui coïncide en fait avec la solution de haute dilution. Partant de l'expression de la souplesse homogénéisée (équation (5.92)*b* du tome 1) :

$$\boldsymbol{S}^{\mathsf{HS}} = \boldsymbol{S}_1 + c_2(\boldsymbol{S}_2 - \boldsymbol{S}_1) : [\boldsymbol{I} + c_1\boldsymbol{Q} : (\boldsymbol{S}_2 - \boldsymbol{S}_1)]^{-1} \tag{3.25}$$

pour un matériau à deux phases, où $\boldsymbol{S}_1$ et $\boldsymbol{S}_2$ sont respectivement les souplesses de la matrice et des inclusions, c_1 et c_2 les fractions volumiques et $\boldsymbol{Q}$ le tenseur analogue à $\boldsymbol{P}$, égal à l'inverse de $\boldsymbol{S}^\star + \boldsymbol{S}_1$, avec $\boldsymbol{S}^\star = (\boldsymbol{C}^\star)^{-1}$. On note l'identité $\boldsymbol{S}^0 : \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P} : \boldsymbol{C}^0 = \boldsymbol{I}$, où $\boldsymbol{S}^0$ et $\boldsymbol{C}^0$ sont la souplesse et la rigidité du milieu de comparaison, ici choisi identique à la matrice ($\boldsymbol{S}^0 = \boldsymbol{S}_1$). En faisant tendre $\boldsymbol{S}_2$ vers l'infini, après réarrangement, on trouve facilement :

$$\boldsymbol{S}^{\mathsf{HS}} = \boldsymbol{S}_1 + \frac{c_2}{1 - c_2}\boldsymbol{Q}^{-1}\,. \tag{3.26}$$

Il reste maintenant à faire tendre la fraction volumique c_2 vers 0. Par exemple, en tridimensionnel, pour des fissures planes circulaires supposées toutes de taille identique, on posera $c_2 = \eta\frac{N}{|V|}l^3 = \eta\,\rho$, où η est l'excentricité de l'ellipsoïde. En faisant tendre η vers 0 on trouve alors :

$$\boldsymbol{S}^{\mathsf{HS}} = \boldsymbol{S}_1 + \rho \lim_{\eta\to 0} \eta\,\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{S}_1 + \rho\,\boldsymbol{H}\,, \tag{3.27}$$

expression linéaire en ρ qui coïncide exactement avec la solution de haute dilution. Ne distinguant pas la forme ellipsoïdale des cavités de celle de leur fonction de répartition spatiale dans cette solution, on traite implicitement une fonction de répartition des fissures dégénérée en un ellipsoïde totalement aplati lorsque l'excentricité des cavités tend vers 0. Ceci n'ayant de sens que pour des fissures infiniment éloignées les unes des autres, on retrouve donc la solution sans interaction.

Pour prendre en compte les interactions il faut introduire deux fonctions de forme indépendantes [PON 95], ce qui donne :

$$\boldsymbol{S}^{\mathsf{PCW}} = \left\{ \boldsymbol{I} + c_2 \left[\left(\boldsymbol{S}_1 : \boldsymbol{S}_2^{-1} - \boldsymbol{I} \right)^{-1} + \boldsymbol{S}_i^{\mathsf{E}} - c_2\, \boldsymbol{S}_d^{\mathsf{E}} \right]^{-1} \right\}^{-1} : \boldsymbol{S}_1 \,, \tag{3.28}$$

où $\boldsymbol{S}_i^{\mathsf{E}}$ et $\boldsymbol{S}_d^{\mathsf{E}}$ sont les tenseurs d'Eshelby associés respectivement à la forme de l'inclusion et à la forme de la fonction de répartition spatiale. Notons aussi les relations $\boldsymbol{S}_i^{\mathsf{E}} = \boldsymbol{P}_i : \boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_1 : \boldsymbol{Q}_i$ pour l'inclusion dans un milieu de souplesse $\boldsymbol{S}_1$. On commence par faire tendre la souplesse $\boldsymbol{S}_2$ vers l'infini, ce qui conduit à un milieu poreux :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}^{\mathsf{PCW}} &= \left[\boldsymbol{I} + c_2 \left(\boldsymbol{S}_i^{\mathsf{E}} - c_2\, \boldsymbol{S}_d^{\mathsf{E}} - \boldsymbol{I} \right)^{-1} \right]^{-1} : \boldsymbol{S}_1 \\ &= \boldsymbol{S}_1 - \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_d^{\mathsf{E}} + \frac{1}{c_2} \left(\boldsymbol{S}_i^{\mathsf{E}} - \boldsymbol{I} \right) \right]^{-1} : \boldsymbol{S}_1 \,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

On remarquera que l'on retrouve (3.26) en posant $\boldsymbol{S}_d^{\mathsf{E}} = \boldsymbol{S}_i^{\mathsf{E}}$. Il faut maintenant faire tendre l'excentricité de l'inclusion vers 0, en notant que $\lim_{\eta \to 0} c_2 (\boldsymbol{Q}_i)^{-1} = \lim_{\eta \to 0} \eta\, \rho\, (\boldsymbol{Q}_i)^{-1} = \rho\, \boldsymbol{H}_i$, ce qui donne :

$$\boldsymbol{S}^{\mathsf{PCW}} = \boldsymbol{S}_1 - \rho \left[\rho\, (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_d^{\mathsf{E}}) + \boldsymbol{S}_1 : (\boldsymbol{H}_i)^{-1} \right]^{-1} : \boldsymbol{S}_1 \,, \tag{3.30}$$

où la densité de fissures ρ intervient de façon non linéaire, ce qui livre une solution d'ordre deux en ρ. Les simulations numériques de la figure 3.4 s'en écartent peu, au moins en bidimensionnel. Notons que la solution élaborée ici correspond au cas des fissures toutes parallèles. Le traitement des fissures à répartition et orientation aléatoires est présenté dans [PON 95].

3.1.2.5. *Expériences numériques directes*

Des solutions approchées pour des populations de fissures arbitraires (en dimension, orientation, position) peuvent être obtenues avec une bonne précision en passant par les champs de contraintes localement appliqués sur chacune d'elles. On utilise ici la méthode qui sera décrite au paragraphe 3.1.3.3 pour obtenir le vecteur contrainte moyen $\langle \boldsymbol{t} \rangle_i$ sur chaque fissure i, par résolution d'un système linéaire. Introduisant dans le potentiel (3.9) la relation de proportionnalité (3.6), on obtient les propriétés effectives pour chaque arrangement de fissures.

Deux configurations notablement différentes sont reproduites ici, d'après [KAC 94] et [MAU 94] : fissures d'orientations aléatoires et fissures parallèles.

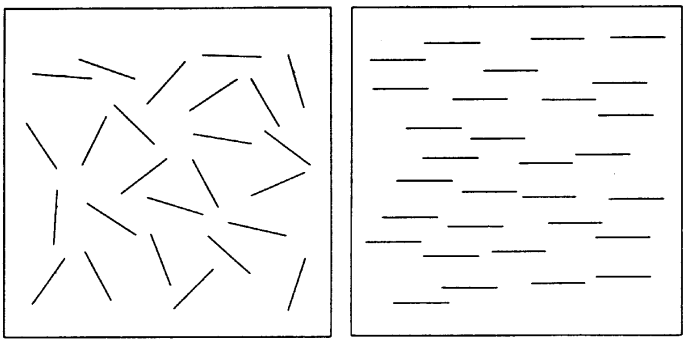


Figure 3.2. *Echantillons de réseaux de fissures d'orientations aléatoires ($\rho = 0{,}25$) et parallèles ($\rho = 0{,}30$) [KAC 94]*

On utilise respectivement 25 et 30 fissures, de dimensions identiques, leurs centres étant dans les deux cas positionnés de façon aléatoire en excluant les croisements de fissures et une trop grande proximité entre pointes de fissures. Quinze tirages au sort sont effectués pour chacune des six densités de fissures retenues ; la figure 3.2 présente un exemple pour chacune des deux configurations. Les résultats des simulations de module effectif sont reproduites sur les figures 3.3 et 3.4, où les barres verticales indiquent la fourchette de dispersion sur l'ensemble des tirages. On remarque que la solution numérique directe redonne presque exactement la solution sans interaction, au moins dans le cas de fissures d'orientations aléatoires en raison, rappelons-le, de la distribution aléatoire des centres (et extrémités) des fissures qui permet l'annihilation en moyenne des effets d'écrantage et d'amplification. La méthode autocohérente sous-évalue fortement le module, qui s'annule pour $\rho = 1/\pi$ dans le premier cas, tandis que celle du schéma différentiel donne une décroissance trop prononcée. La trop forte réduction des modules donnée par ces méthodes de milieu effectif tient à la seule prise en compte des effets d'interaction par amplification : le milieu dans lequel est plongé chaque fissure est un milieu à rigidité réduite, mais les effets d'écrantage, qui interviennent dans une importante partie du voisinage de deux fissures, ne sont pas pris en compte.

3.1.3. *Méthode de localisation dans les milieux élastiques fissurés*

Il s'agit ici d'obtenir les champs de contraintes locaux à partir des contraintes et déformations moyennes (ou macroscopiques). Cela passe par la connaissance des facteurs d'intensité des contraintes de chacune des pointes de fissure. On utilise ici encore les travaux de synthèse de [KAC 94]. Les solutions sont pré-

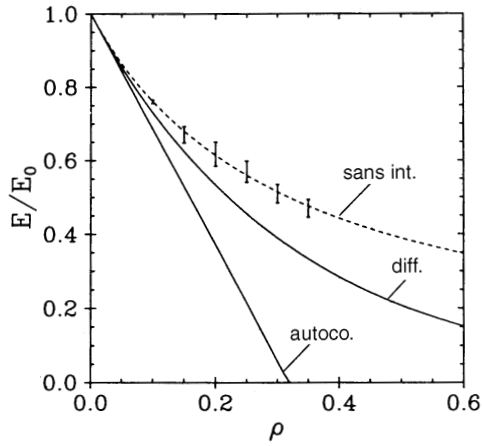


Figure 3.3. *Module de Young effectif, fissures d'orientations aléatoires : résultats numériques (barres verticales), solution sans interaction, schéma différentiel et méthode autocohérente [KAC 94]*

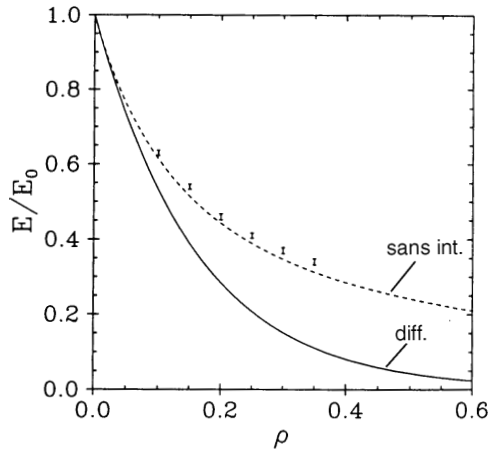


Figure 3.4. *Module de Young effectif, fissures parallèles : résultats numériques (barres verticales), solution sans interaction et schéma différentiel [KAC 94]*

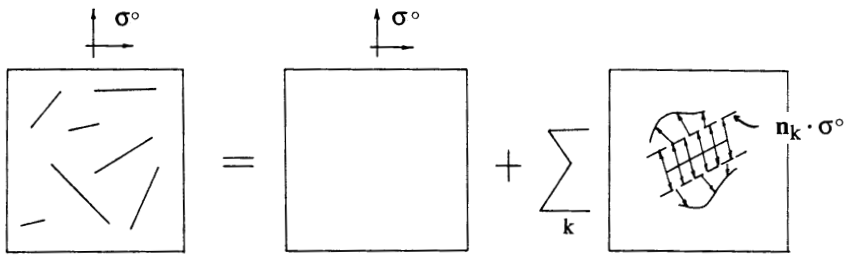


Figure 3.5. *Superposition des contraintes : réduction du problème de plusieurs fissures à autant de sous-problèmes à une seule fissure chargée par des vecteurs contrainte inconnus [KAC 94]*

sentées uniquement pour le cas bidimensionnel, mais leur généralisation en tridimensionnel est possible, bien que plus laborieuse. D'autres méthodes peuvent être mises en œuvre, basées par exemple sur les équations intégrales de frontière [REN 96].

3.1.3.1. *Décomposition du problème*

Le problème du calcul d'une fissure soumise à un champ lointain σ_∞ se décompose d'une façon classique en la solution du problème complet sans fissure, superposée à la solution du problème avec fissure sans chargement extérieur, la fissure étant soumises sur ses lèvres à l'opposé des vecteurs contrainte présents sur sa ligne fictive dans la solution homogène sans fissure.

Dans le cas de N fissures, la décomposition se fait en N sous-problèmes avec une fissure chacun, soumise à des vecteurs contrainte inconnus (figure 3.5). Le long de la fissure i (position ξ^i du point courant), ce vecteur est alors donné par :

$$\boldsymbol{t}^i(\xi^i) = \boldsymbol{n}^i \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_0 + \sum_{j \neq i} \Delta \boldsymbol{t}^{ji}(\xi^i)\,, \tag{3.31}$$

où $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_0$ est le champ sans fissure, tandis que $\Delta \boldsymbol{t}^{ji}$ représente l'effet d'interaction induit par la fissure j le long de la fissure i.

3.1.3.2. *Calcul des facteurs d'intensité des contraintes et du C.O.D.*

En deux dimensions, une fois déterminé le vecteur contrainte le long de la ligne de fissure i, de composantes normale $p(\xi)$ et tangentielle $\tau(\xi)$, on ob-

tient les facteurs d'intensité des contraintes en mode I et II découplés de façon classique :

$$\begin{Bmatrix} K_I(\pm l) \\ K_{II}(\pm l) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{+l} \sqrt{\frac{l \pm \xi}{l \mp \xi}} \begin{Bmatrix} p(\xi) \\ \tau(\xi) \end{Bmatrix} \mathrm{d}\xi \,. \tag{3.32}$$

Toujours en bidimensionnel, dans le cas d'une traction ponctuelle $\boldsymbol{F}$ appliquée en $\xi = a$ sur les faces opposées d'une fissure, l'ouverture est colinéaire à $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{b}(\xi) = \frac{4\,l}{\pi E'} \frac{l^2 - a\,\xi + \sqrt{(l^2 - a^2)(l^2 - \xi^2)}}{l\,|\xi - a|} \boldsymbol{F}$$

$$\text{et} \quad \langle \boldsymbol{b} \rangle = \frac{4\,l}{E'} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2} \boldsymbol{F} \,, \tag{3.33}$$

alors que pour une traction uniforme $\boldsymbol{t}$, on trouve :

$$\boldsymbol{b}(\xi) = \frac{4\,l}{E'} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{l}\right)^2} \boldsymbol{t} \qquad \text{et} \qquad \langle \boldsymbol{b} \rangle = \frac{\pi\,l}{E'} \boldsymbol{t} \,. \tag{3.34}$$

La relation (3.34) n'est qu'approchée dans le cas d'une traction non uniforme mais, en approximant $p(\xi)$ par une cubique de coefficients α, β, γ, on montre que les termes d'ordre impair n'interviennent pas sur le résultat et que (3.34*b*) doit être multipliée par $(1+\beta/4)/(1+\beta/3)$. Le coefficient quadratique β ne dépassant pas l'unité dans les problèmes d'interaction étudiés, l'écart à la relation (3.34*b*), reste très limité.

Des solutions existent en tridimensionnel pour des fissures circulaires, obtenues à partir de fonctions simples [FAB 90]. Citons simplement ici les ouvertures moyennes pour des chargements uniformes de traction normale et de cisaillement ; à la différence du cas bidimensionnel, les « souplesses » de fissure dans les directions normale et de cisaillement sont différentes (mais peu) :

$$\langle b_n \rangle = \frac{16\,l}{3\pi E}(1 - \nu^2)\,p \qquad \text{et} \qquad \langle b_\tau \rangle = \frac{32\,l}{3\pi E} \frac{1 - \nu^2}{2 - \nu} \tau \,. \tag{3.35}$$

3.1.3.3. *Calcul d'un réseau de microfissures*

Pour un réseau arbitraire en deux dimensions, chargé par des vecteurs contrainte $\boldsymbol{n}^i \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_0$ incluant une composante normale $p_0^i = \boldsymbol{n}^i \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_0 \cdot \boldsymbol{n}^i$ et une composante tangentielle $\boldsymbol{\tau}_0^i = \boldsymbol{n}^i \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_0 - p_0^i\,\boldsymbol{n}^i$, on représente le problème comme une superposition de problèmes élémentaires à une fissure (paragraphe 3.1.3.1). Le vecteur contrainte $\boldsymbol{t}^j(\xi^j)$ sur la fissure j est la somme de sa moyenne $\langle \boldsymbol{t}^j \rangle$ et d'une fluctuation. L'hypothèse simplificatrice de la méthode de Kachanov

[KAC 94] est de négliger l'influence sur la fissure i de la non uniformité de vecteur contrainte sur la fissure j.

En écrivant dans (3.31) l'inconnue $\Delta \boldsymbol{t}^{ji}$ comme le produit de $\langle \boldsymbol{t}^j \rangle$ inconnu et de champs standards unitaires (les champs $\boldsymbol{\sigma}_n^j(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau^j(\boldsymbol{x})$ induits par la fissure j chargée uniformément par une composante normale ou tangentielle unitaire, voir [KAC 94] par exemple), on a, sur la fissure i :

$$p^i(\xi) = p_0^i + \boldsymbol{n}^i \cdot \sum_{j \neq i} \left[\langle p^j \rangle \, \boldsymbol{\sigma}_n^j(\xi) + \langle \tau^j \rangle \, \boldsymbol{\sigma}_\tau^j(\xi) \right] \cdot \boldsymbol{n}^i \quad \text{et}$$

$$\tau^i(\xi) = \tau_0^i + \boldsymbol{n}^i \cdot \sum_{j \neq i} \left[\langle p^j \rangle \, \boldsymbol{\sigma}_n^j(\xi) + \langle \tau^j \rangle \, \boldsymbol{\sigma}_\tau^j(\xi) \right] \cdot \left(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{n}^i \otimes \boldsymbol{n}^i \right) . \quad (3.36)$$

En faisant la moyenne de ces champs sur la fissure i dans (3.36) on obtient :

$$\langle p^i \rangle = p_0^i + \sum_{j \neq i} \left[\Lambda_{nn}^{ji} \langle p^j \rangle + \Lambda_{tn}^{ji} \langle \tau^j \rangle \right] \quad \text{et}$$

$$\langle \tau^i \rangle = \tau_0^i + \sum_{j \neq i} \left[\Lambda_{nt}^{ji} \langle p^j \rangle + \Lambda_{tt}^{ji} \langle \tau^j \rangle \right] , \quad (3.37)$$

système linéaire de $2N$ équations d'inconnues $\langle p^i \rangle$ et $\langle \tau^i \rangle$ que l'on peut écrire sous forme compacte :

$$\left(2\, \delta_{ik}\, \boldsymbol{i} - \boldsymbol{\Lambda}^{ik} \right) \cdot \langle \boldsymbol{t}^i \rangle = \boldsymbol{t}_0^k , \quad (3.38)$$

où les seconds membres $\boldsymbol{t}_0^k$ sont donnés par le chargement imposé $\boldsymbol{n}^k \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_0$. Les termes $\boldsymbol{\Lambda}^{ji}$ (*transmission factors* dans [KAC 94]) caractérisent l'influence d'une fissure sur une autre. Par exemple, Λ_{nt}^{31} est le cisaillement moyen induit, dans un milieu continu, sur le site de la fissure 1 par la contrainte normale unitaire uniforme chargeant la fissure 3. La solution du système (3.38) peut être mise sous la forme :

$$\langle \boldsymbol{t}^i \rangle = \sum_j \boldsymbol{\omega}^{ji} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_0 \cdot \boldsymbol{n}^j \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{\omega}^{ji} = \left(2\delta_{ji}\, \boldsymbol{i} - \boldsymbol{\Lambda}^{ji} \right)^{-1} , \quad (3.39)$$

où la sommation s'applique à toutes les fissures ($j = 1, 2, ..., N$). On obtient ensuite les composantes $p^i(\xi)$ et $\tau^i(\xi)$ sur chaque fissure à l'aide de (3.36), et les facteurs d'intensité des contraintes à partir de (3.32). La connaissance des vecteurs contrainte moyens suffit pour déterminer le comportement effectif du VER, comme on l'a vu au paragraphe 3.1.2.5. La même méthode peut s'appliquer en trois dimensions pour des ensembles de fissures circulaires distribuées dans un solide infini isotrope [KAC 94].

3.1.4. *Champ de contraintes complet*

Le champ de déplacements induit par une seule fissure peut être représenté par l'intégrale d'un potentiel de type « double couche » (représentation d'une fissure par des dislocations) :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \int_{-l}^{+l} \boldsymbol{b}(\xi) \cdot \boldsymbol{\Phi}(\xi, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}\xi \,, \tag{3.40}$$

$\boldsymbol{b}(\xi)$ étant le C.O.D. et $\boldsymbol{\Phi}$ le second tenseur de Green de l'élasticité isotrope pour un plan infini avec une ligne de discontinuité (la fissure) de normale $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi, \boldsymbol{x}) = \frac{1+\nu}{4\pi r} \left\{ (1-2\nu) \left[\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{e} - \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}) \boldsymbol{i} \right] - 2 (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}) \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e} \right\} \,, \tag{3.41}$$

où $\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x} = r\,\boldsymbol{e}$, avec $\boldsymbol{e}$ unitaire. On a supposé les contraintes planes ; dans le cas des déformations planes, il faut remplacer $1+\nu$ par $\frac{1}{1-\nu}$. La différenciation de $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ et la multiplication par les constantes d'élasticité appropriées fournit le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ dès lors que $\boldsymbol{b}(\xi)$ est connu. Dans le cas de N fissures, il faut sommer les intégrales (3.40) sur toutes les fissures. Pour trouver les déplacements d'ouverture $\boldsymbol{b}(\xi)$ à partir des composantes $p(\xi)$ et $\tau(\xi)$ fournies par (3.36), Kachanov propose l'interpolation suivante (C.O.D. associé à un vecteur contrainte uniforme multiplié par un polynôme du second degré), avec deux fois trois constantes d'interpolation $(\sigma_n, \alpha_n, \beta_n)$ et $(\sigma_t, \alpha_t, \beta_t)$:

$$b_n = \frac{4\,l}{E'} \sigma_n \left(1 + \alpha_n \frac{\xi}{l} + \beta_n \frac{\xi^2}{l^2} \right) \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{l^2}} \,,$$
$$b_t = \frac{4\,l}{E'} \sigma_t \left(1 + \alpha_t \frac{\xi}{l} + \beta_t \frac{\xi^2}{l^2} \right) \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{l^2}} \,, \tag{3.42}$$

et les détermine de façon à retrouver les résultats précédents pour les composantes moyennes $\langle p \rangle$ et $\langle \tau \rangle$, et pour les facteurs d'intensité des contraintes $K_I(\pm l)$ et $K_{II}(\pm l)$. On trouve, pour la composante normale (avec des relations analogues pour la composante tangentielle) :

$$\sigma_n = 2\,\langle p \rangle - \frac{K_I(l) + K_I(-l)}{2\sqrt{\pi l}} \,,\ \alpha_n = \frac{K_I(l) - K_I(-l)}{4\,\langle p \rangle \sqrt{\pi l} - K_I(l) - K_I(-l)} \,,$$
$$\beta_n = 2\,\frac{K_I(l) + K_I(-l) - 2\,\langle p \rangle \sqrt{\pi l}}{4\,\langle p \rangle \sqrt{\pi l} - K_I(l) - K_I(-l)} \,. \tag{3.43}$$

Critère d'évolution de l'endommagement

Grâce aux méthodes de localisation étudiées plus haut, on connaît toutes les quantités locales qui peuvent avoir à intervenir :

- les champs de contraintes locaux peuvent être employés pour créer de nouvelles fissures, par exemple avec un critère de nucléation par clivage ;
- les facteurs d'intensité des contraintes K_I et K_{II} peuvent servir dans des lois de propagation sous-critique (fissuration par corrosion sous contrainte ou par fatigue), par exemple avec une loi de type Paris $\frac{dl}{dN} = f(\Delta K, K_{max})$ en fatigue ;
- on peut éventuellement utiliser des critères d'instabilité fragile, tels que $K < K_{I_c} \Rightarrow \dot{l} = 0$ et $K = K_{I_c} \Rightarrow \dot{l} \neq 0$, à condition de savoir résoudre de façon stable l'ensemble des inéquations associées à des fissures, donc des critères multiples.

Ces méthodes ont encore été très peu utilisées, même à deux dimensions avec un milieu homogène, isotrope et toutes les fissures ouvertes. Citons cependant [FON 92], [REN 96], tenant compte des conditions de contact et frottement. Dans le cas tridimensionnel, même si les solutions peuvent être écrites au moins pour des fissures circulaires, l'évolution de populations de microfissures n'a pas encore été vraiment traitée, sans parler des cas plus complexes encore d'anisotropie de la matrice, de fermeture de fissures et de frottement, de milieux hétérogènes, etc. Ces situations ne peuvent aujourd'hui être abordées qu'avec des méthodes très simplifiées.

3.1.5. *Fermeture des fissures, énergie élastique stockée et frottement*

3.1.5.1. *Mise en évidence d'une énergie élastique stockée*

On se place dans un cadre extrêmement simplifié, avec un milieu endommagé contenant des familles de réseaux de fissures parallèles, sans prendre en compte les interactions. Les conditions de fermeture des fissures sont très simplifiées ; pour un critère en contraintes, la condition unilatérale s'exprime par les trois relations :

$$b_n \geqslant 0\,, \qquad \overline{\sigma}_{nn} = \boldsymbol{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad b_n\,\overline{\sigma}_{nn} = 0\,. \tag{3.44}$$

On suppose de plus, pour le moment, que le coefficient de frottement est infini, ce qui empêche tout glissement relatif des lèvres de fissure lorsqu'elles sont fermées : $b_t\,\overline{\sigma}_{nn} = 0$ lorsque $\overline{\sigma}_{nn} < 0$. Cela n'empêche pas b_t de pouvoir prendre des valeurs non nulles du fait du chargement élastique préalable. Avec

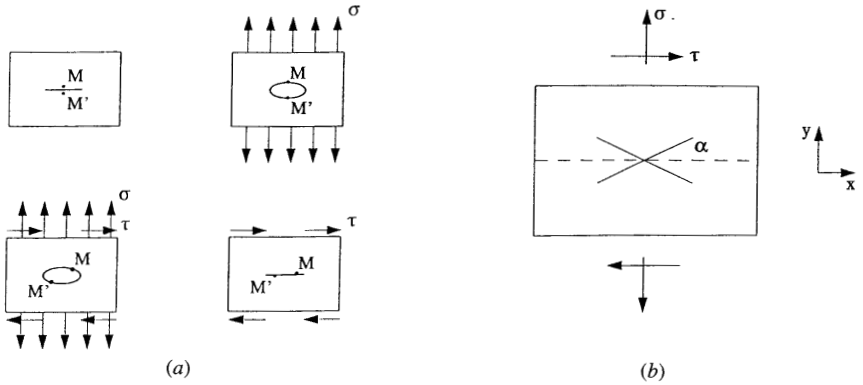


Figure 3.6. *(a) Cycle de traction-cisaillement et (b) configuration à deux systèmes de fissures*

les approximations faites, sans interaction des fissures, les solutions élémentaires du milieu infini élastique montrent que la fermeture (ou l'ouverture) se produit uniformément pour l'ensemble de la fissure et, dans ce cadre simplifié, on met facilement en évidence l'existence de déformations élastiques stockées par fermeture. Dans l'exemple de la figure 3.6*a*, avec un seul réseau de fissures, l'application d'une contrainte normale σ ouvre la fissure ; un cisaillement τ déplace les lèvres tangentiellement ; en annulant σ (ou le rendant légèrement négatif), puis en relâchant le cisaillement, on constate un état de déformation élastique stockée : c'est le champ de déformation de cisaillement supplémentaire associé à l'existence de la fissure ouverte (le cisaillement associé au milieu sans fissure a été relâché en annulant τ).

Le cas de deux systèmes de fissures (figure 3.6*b*) sollicitées en (σ, τ) dans les axes de symétrie permet de mettre en évidence des déformations axiale et transverse stockées [BOU 96]. On utilise pour cela la solution de Kachanov, pour un seul système de fissures, qui décompose le tenseur des souplesses en $\underset{\sim}{S} = \boldsymbol{S}_0 + \Delta\boldsymbol{S}$. Avec des notations matricielles de Voigt ($\overline{\sigma}_{11}$, $\overline{\sigma}_{22}$, $\overline{\sigma}_{12}$), $\Delta\boldsymbol{S}$ dans les axes de chaque fissure est de la forme :

$$\Delta\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_6 \end{bmatrix} . \tag{3.45}$$

En partant d'un chargement combiné (σ, τ) dans lequel σ est positif et suffisamment élevé pour que les deux fissures soient ouvertes, on décharge la contrainte axiale à cisaillement constant. Lorsque $\sigma = \sigma_1 = 2\tau \tan\alpha > 0$ il y a fermeture de la première fissure (car la contrainte normale à la fissure s'annule et devient négative). On a alors une première déformation stockée définie par

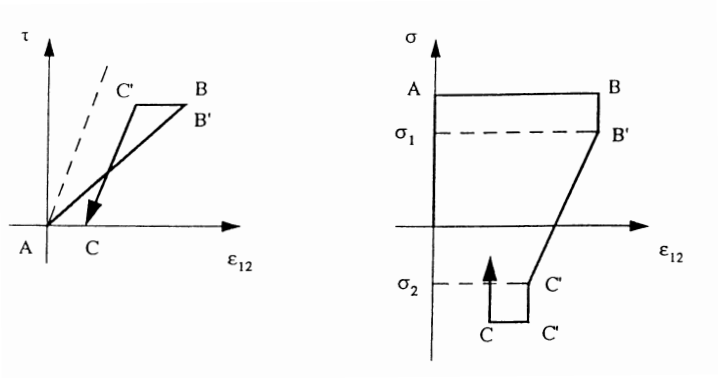


Figure 3.7. *Fermeture des fissures en deux étapes, dans le cas d'une décroissance de la contrainte axiale (exemple de la figure 3.6b)*

$\boldsymbol{\beta}_1 = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1_{av.} - \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1_{ap.}$. En poursuivant la décharge, il n'y a plus orthotropie et un couplage traction-cisaillement intervient (figure 3.7), la déformation de cisaillement diminuant lorsque la contrainte τ reste constante (trajet $B'C'$). En C', pour $\sigma = \sigma_2 = -2\tau \tan\alpha$, la seconde fissure se ferme, avec une nouvelle déformation stockée $\boldsymbol{\beta}_2 = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^2_{av.} - \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^2_{ap.}$. Finalement, sur le trajet $C'C$, la souplesse est identique à la souplesse initiale ($\Delta\boldsymbol{S} = 0$) et, après annulation du cisaillement, la déformation stockée par glissement pur est :

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (c^2 - s^2)H_6\,\tau \end{Bmatrix}. \tag{3.46}$$

Dans l'exemple d'une traction biaxiale, avec $\sigma_1 > 0$ et σ_2 décroissant d'une valeur positive (les deux fissures sont ouvertes) à une valeur négative, on observe la fermeture simultanée des deux fissures, avec $\sigma_2 = -(c/s)^2\sigma_1$ et une déformation résiduelle égale à :

$$\boldsymbol{\beta} = \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{av.} - \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ap.} = \begin{Bmatrix} c^2 H_6\,\sigma_1 \\ -c^2 H_6\,\sigma_1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{3.47}$$

On remarque dans ces exemples que le changement de souplesse ne s'accompagne pas de discontinuité de déformation. En fait, la discontinuité correspondante, $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{av.} - \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ap.}$, est à chaque fois interprétée comme une déformation bloquée par le mécanisme de frottement infini sur les lèvres de fissure.

3.1.5.2. *Modélisation pour une famille quelconque de fissures*

La condition d'ouverture-fermeture doit être écrite pour chaque fissure indépendamment, ou pour chaque ensemble de fissures parallèles. De façon cohérente avec ce qui précède, toujours avec un frottement infini et sans tenir compte des interactions, on écrira la souplesse globale sous la forme :

$$\widetilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}_0 + \sum_i h\left(\boldsymbol{n}^i \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}^i\right) \delta^i \, \boldsymbol{H}^i \,, \tag{3.48}$$

où h est la fonction d'Heaviside, $\boldsymbol{n}^i \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}^i$ est la contrainte normale à la fissure, $\boldsymbol{H}^i$ le tenseur de variation de souplesse dû à la fissure i, dont l'effet est réglé ici par le paramètre de dommage δ^i. En deux dimensions, utilisant (3.12) par exemple, on pourra prendre $\boldsymbol{H}^i$ de composantes $H^i_{pqrs} = \frac{\pi}{2E'_0}(n_p\, n_r\, \delta_{qs} + n_p\, n_s\, \delta_{qr})$ et $\delta^i = (l^i)^2 / \,|A|$, mais toute autre expression plus générale (avec interactions, anisotropie, etc.) peut convenir.

A dommage fixé, lorsqu'une fermeture a lieu, c'est-à-dire lorsque l'un des $\overline{\sigma}_n$ passe d'une valeur positive à une valeur négative, le tenseur de souplesse est modifié en lui retranchant la quantité $\delta^j \, \boldsymbol{H}^j$. Il s'en suivrait une discontinuité de déformation macroscopique qui est considérée comme stockée. Celle-ci dépend de la contrainte $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^j_{fer.}$ appliquée à cet instant :

$$\boldsymbol{\beta}^j = \delta^j \, \boldsymbol{H}^j : \overline{\boldsymbol{\sigma}}^j_{fer.} \,. \tag{3.49}$$

Ainsi, pour chaque fissure fermée il y a une variable de déformation stockée $\boldsymbol{\beta}^j$, reliée à la contrainte macroscopique correspondante par (3.49). La déformation macroscopique totale est alors donnée à partir de la contrainte macroscopique et des différentes déformations stockées :

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \widetilde{\boldsymbol{S}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\beta}^j \,, \tag{3.50}$$

où les $\boldsymbol{\beta}^j$ sont soit nuls si la fissure correspondante est ouverte, soit donnés par (3.49) en fonction de l'état de contraintes qui existait à l'instant de fermeture. Par intégration et récurrence, on peut montrer que cette déformation macroscopique dérive d'une énergie élastique complémentaire exprimée en fonction des variables d'état (stockées) $\boldsymbol{\beta}^j$ [AND 86], [BOU 96] :

$$\psi = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \widetilde{\boldsymbol{S}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{j=1}^{N} \left[\boldsymbol{\beta}^j : \overline{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{2\,\delta^j} \, \boldsymbol{\beta}^j : (\boldsymbol{H}^j)^{-1} : \boldsymbol{\beta}^j \right] . \tag{3.51}$$

Un stockage d'énergie peut éventuellement être suivi d'une libération, lorsque la contrainte normale à l'un des défauts passe d'une valeur négative à une valeur

positive. Il peut y avoir dans ce cas une discontinuité de la déformation, égale à $\delta^j \boldsymbol{H}^j : (\overline{\boldsymbol{\sigma}}^j_{ouv.} - \overline{\boldsymbol{\sigma}}^j_{fer.})$, avec un relâchement correspondant (discontinu) de l'énergie élastique (sauf si les états de contraintes lors de l'ouverture et lors de la fermeture qui avait précédé étaient identiques).

3.1.6. *Modélisation du frottement*

Supposons un frottement de Coulomb de coefficient μ ; le critère doit être exprimé sur chaque fissure en fonction des contraintes normale p et tangentielle τ (on se place en deux dimensions pour simplifier) :

$$\begin{cases} \text{si} \quad |\tau(\xi)| < -\mu\, p(\xi) & \text{alors} \quad \dot{b}_\tau(\xi) = 0\,, \\ \text{si} \quad |\tau(\xi)| = -\mu\, p(\xi) & \text{alors} \quad \dot{b}_t(\xi) = \dot{\lambda}\ \operatorname{sgn}(\tau(\xi)), \quad \dot{\lambda} \geqslant 0\,. \end{cases} \tag{3.52}$$

Dans l'hypothèse d'une contrainte macroscopique uniforme et en négligeant les interactions, c'est-à-dire en supposant que l'ouverture de fissure s'exprime par (3.34), la condition (3.52) s'applique de façon uniforme sur la fissure considérée. On démontre alors [AND 86] que le critère de Coulomb appliqué à l'échelle microscopique se traduit macroscopiquement par un critère de Coulomb avec « translation » (de type écrouissage cinématique) :

$$f\,(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, b_t) = |\overline{\sigma}_{nt} - K\, b_t| + \mu\, \overline{\sigma}_{nn} \qquad \text{si} \qquad \overline{\sigma}_{nn} < 0\,, \tag{3.53}$$

où $K = E'/\pi\, l$, déduit de (3.6) et (3.7). Avec les notations employées ci-dessus, et en se limitant au cas d'une seule fissure, on aura :

$$f\,(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta}) = \left| \boldsymbol{n} \cdot \left(\overline{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{\delta} \boldsymbol{H}^{-1} : \boldsymbol{\beta} \right) \cdot \boldsymbol{t} \right| + \mu\, \boldsymbol{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n} \leqslant 0\,. \tag{3.54}$$

La contrainte tangentielle active sur les lèvres de la fissure est évaluée à partir de l'état de début de contact, par $\boldsymbol{n} \cdot (\overline{\boldsymbol{\sigma}} - \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{fer.}) \cdot \boldsymbol{t}$. La variable $\boldsymbol{\beta}$ joue à la fois le rôle de variable de stockage d'énergie élastique (quand le critère n'est pas atteint) et celui de variable de dissipation par frottement. Le critère fonctionne alors comme sur la figure 3.8, en posant $X_{nt} = \boldsymbol{n} \cdot \left(\boldsymbol{H}^{-1} : \boldsymbol{\beta}\right) \cdot \boldsymbol{t}/\delta$ [AND 86] :

- si $\overline{\sigma}_{nn} > 0$ la fissure est ouverte, le dommage est actif et le comportement effectif est défini par $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_0 + \delta\, \boldsymbol{H}$;
- si $\overline{\sigma}_{nn} < 0$ et $|\overline{\sigma}_{nt} - X_{nt}| < \mu\, \overline{\sigma}_{nn}$ le déplacement de cisaillement des lèvres de la fissure est bloqué et traduit macroscopiquement par $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{0}$;
- lorsque $|\overline{\sigma}_{nt} - X_{nt}|$ atteint $\mu\, \overline{\sigma}_{nn}$ il y a glissement relatif des lèvres avec $\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq \boldsymbol{0}$. Le sommet du critère de Coulomb se déplace simultanément.

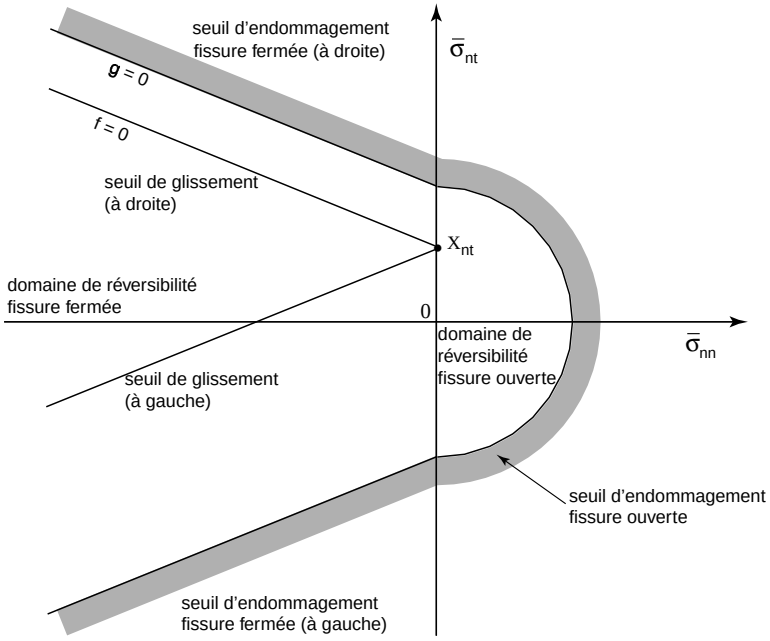


Figure 3.8. *Critères de « frottement-endommagement » macroscopiques associés aux mécanismes locaux sur une famille de microfissures parallèles (d'après [AND 86])*

Au-delà des mécanismes de contact-frottement décrits ici, il faudrait inclure les mécanismes d'endommagement, ce qui ne sera pas fait de façon précise. La discussion ci-dessous découle de la démarche suivie dans [AND 86], mais conserve un caractère macroscopique assez marqué. La figure 3.8 illustre le fait qu'à fissure ouverte ($\overline{\sigma}_{nn} > 0$), un critère de nouvel endommagement peut être atteint, qui va provoquer la croissance de la fissure (en mode I, II ou mixte). Dans le cas de la compression, au contraire, le critère de croissance sera en mode II pur. Il fonctionnera à partir de la valeur maximale atteinte dans le passé par la variable $\boldsymbol{\beta}$, qui sert alors de variable motrice de l'endommagement.

Remarquons, avant de clore ce paragraphe, que l'utilisation du critère de Coulomb implique que l'énergie élastique stockée évoquée au paragraphe 3.1.5.2 est limitée et qu'il n'y a pas discontinuité lors de la réouverture. En effet, dans ce cas, le critère de glissement est nécessairement atteint à nouveau avant ouverture, si bien que la libération d'énergie se fait de façon progressive, en dissipant par frottement. Notons aussi que la variable $\boldsymbol{\beta}$ employée dans cette approche diffère un peu de celle utilisée dans [AND 86], qui est directement reliée au C.O.D. ou à la déformation $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathsf{D}}$ supplémentaire due au dommage. Nous avons ici choisi de ne considérer cette variable que lorsqu'elle est réellement

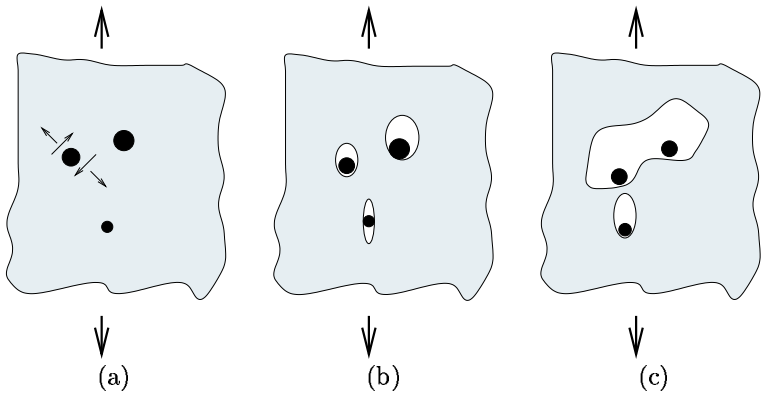


Figure 3.9. *Les trois mécanismes principaux de la rupture ductile : (a) nucléation de cavités par rupture ou décohésion de précipités, (b) croissance des cavités et (c) coalescence des cavités*

une variable indépendante, c'est-à-dire lorsqu'elle est stockée (par fermeture) ou dissipe par glissement. Au contraire, quand la fissure est ouverte, $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathsf{D}}$ n'est pas une variable indépendante ; on a en effet $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathsf{D}} = \delta\, \boldsymbol{H} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \delta\, \boldsymbol{H} : \widetilde{\boldsymbol{S}}^{-1} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, qui dépend de $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ ou de $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

3.2. Analyse micromécanique de l'endommagement ductile

3.2.1. *Mécanismes de la rupture ductile et micromécanique*

Le processus qui conduit à la rupture de matériaux ductiles, c'est-à-dire qui peuvent subir des déformations plastiques importantes avant rupture, peut être décomposé en trois étapes principales (figure 3.9) :

- la nucléation : dans un premier temps, des cavités se forment par décohésion ou par rupture de précipités durs ou d'inclusions de seconde phase (la physique de cette étape d'amorçage de l'endommagement est détaillée au chapitre 6) ;
- la croissance : dans un second temps, ces cavités croissent par déformation plastique de la matrice qui entoure ces cavités. Cette croissance s'accompagne d'un changement de volume et d'un changement de forme des cavités ;
- la coalescence : enfin, dans un troisième temps, certaines cavités coalescent en une macrofissure (figure 3.10).

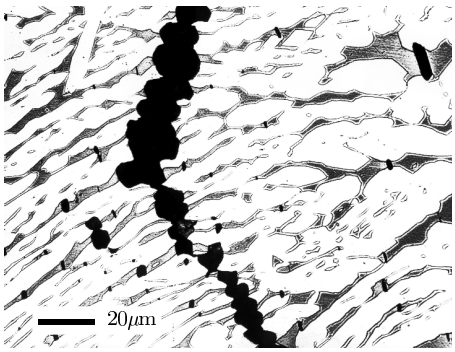


Figure 3.10. *Exemple de formation d'une macrofissure par coalescence de cavités dans un acier duplex*

Ces trois mécanismes peuvent être analysés à des degrés divers par une approche micromécanique. La phase de nucléation relève d'une analyse locale des concentrations de contraintes autour des inclusions (éventuellement à l'intérieur de celles-ci) et de leur décohésion (éventuellement de leur rupture). Nous ne l'aborderons pas ici. Pour étudier les phases de croissance et de coalescence, on considère un volume élémentaire représentatif V formé d'une matrice M et de pores v (à ce stade, la nucléation ayant eu lieu, il n'est plus nécessaire de tenir compte de la présence des inclusions). Les « variables internes » d'endommagement du modèle sont liées à la statistique de répartition de la phase poreuse (moments aux différents ordres de la fonction caractéristique des cavités). Le paramètre le plus immédiat est la fraction volumique des vides $f = |v|/|V|$, ou porosité, moment d'ordre un de la fonction caractéristique des cavités, puis différents tenseurs décrivant la forme moyenne des vides, assimilés dans un premier temps à des ellipsoïdes, et leur distribution moyenne (distances entre cavités). Puis viennent des informations d'ordre encore plus élevé, en général inaccessibles expérimentalement.

La variation de la porosité du matériau provient de deux sources microscopiques qui sont la nucléation de nouvelles cavités et la croissance de celles déjà existantes par déformation plastique de la matrice qui les entoure :

$$\dot{f} = \dot{f}_{nucl.} + \dot{f}_{croi.} \cdot$$

Nous ne discuterons pas en détail le terme de nucléation car il n'a pas à notre connaissance d'évaluation micromécanique satisfaisante. Nous nous contenterons de donner, plus loin dans ce chapitre, des lois de nucléation issues de la littérature. Le terme de croissance, par contre, relève d'une analyse micromé-

canique. Par dérivation de la définition de la porosité, il vient :

$$\frac{\dot{f}}{f} = \frac{|\dot{v}|}{|v|} - \frac{|\dot{V}|}{|V|}, \tag{3.55}$$

où, en notant $\boldsymbol{v}$ le champ de vitesse dans le VER,

$$\frac{|\dot{v}|}{|v|} = \frac{1}{|v|}\int_{\partial v} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \frac{|\dot{V}|}{|V|} = \frac{1}{|V|}\int_{\partial V} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s\,. \tag{3.56}$$

Le calcul de $\dot{f}$ nécessite donc la connaissance du champ $\boldsymbol{v}$, au moins au bord des cavités. Notons toutefois que lorsque la matrice est incompressible, l'évolution de la porosité due à la croissance des cavités résulte d'un simple bilan de volume. En effet, par incompressibilité de la matrice, on a $|\dot{V}| = |\dot{v}|$ et il résulte de (3.55) que :

$$\frac{\dot{f}}{f} = \frac{|\dot{V}|}{|V|}\left(\frac{|V|}{|v|} - 1\right) = \frac{|\dot{V}|}{|V|}\frac{1-f}{f}\,.$$

La vitesse de variation du volume du VER est donnée par $|\dot{V}|/|V| = \mathrm{tr}\left(\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)$, et l'équation finale de variation de porosité est :

$$\dot{f}_{croi.} = (1-f)\,\mathrm{tr}\left(\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right). \tag{3.57}$$

La variation de porosité qui accompagne l'évolution de l'endommagement se traduit donc par une variation de volume macroscopique : le matériau endommagé est compressible alors que la matrice initiale ne l'est pas. L'hypothèse d'incompressibilité de la matrice n'est rigoureusement satisfaite que par la partie plastique de la déformation, non par la partie élastique, et l'on adopte en pratique l'équation d'évolution approchée suivante :

$$\dot{f}_{croi.} = (1-f)\,\mathrm{tr}\left(\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathrm{p}}\right). \tag{3.58}$$

Les deux expressions (3.56) et (3.57) illustrent bien les deux approches possibles pour étudier la croissance des cavités dans les matériaux ductiles. La première approche consiste à déterminer de façon aussi précise que possible le champ de vitesse $\boldsymbol{v}$ pour utiliser (3.56). La seconde approche est basée sur l'équation de conservation (3.57) ou sa variante (3.58). Il est suffisant de connaître, à porosité f fixée, le comportement macroscopique (c'est-à-dire la relation qui lie $\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ ou $\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathrm{p}}$ aux contraintes macroscopiques $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$) pour connaître l'évolution du dommage. Or la loi de comportement macroscopique dérive d'un potentiel de dissipation ; il est donc suffisant de déterminer celui du matériau poreux à porosité f fixée. Les deux approches sont liées, car une bonne connaissance de la cinématique conduit souvent à une bonne connaissance du potentiel. Mais l'approche par potentiel est parfois plus simple car elle permet l'usage d'outils de portée générale.

3.2.2. *Indicateurs d'endommagement, modèles non couplés*

Les premières études de la croissance de cavités dans une matrice plastique ont été consacrées à la déformation d'une cavité contenue dans un massif infini. La porosité est donc nulle et le comportement macroscopique est celui de la matrice (incompressible) : il n'y a pas de couplage entre endommagement et comportement. La seule approche possible est celle qui utilise (3.56).

La croissance d'une cavité cylindrique dans un massif rigide plastique infini régi par le critère de von Mises a été analysée par McClintock [MCC 68] qui a mis en évidence l'influence exponentielle de la triaxialité des contraintes sur la vitesse de croissance des cavités. Cette étude a été généralisée par Rice et Tracey [RIC 69] au cas d'une cavité sphérique dans un massif infini rigide plastique avec critère de von Mises. En utilisant, avec divers champs tests, le principe variationnel qui régit le champ de vitesse de déformation, ces auteurs obtiennent une loi d'évolution approchée pour le rayon de la cavité :

$$\frac{1}{\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{eq}}}\,\frac{\dot{R}}{R} = 0{,}558\,\sinh\left(\frac{3}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}\right) + 0{,}008\,\chi\cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}\right)\,, \tag{3.59}$$

où R est le rayon de la cavité sphérique, $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ la contrainte et la vitesse de déformation à l'infini ($\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ est en fait la vitesse de déformation plastique puisque les déformations élastiques ont été négligées), $\chi = -3\,\dot{\overline{\varepsilon}}_{22}/(\dot{\overline{\varepsilon}}_{11} - \dot{\overline{\varepsilon}}_{33})$. Lorsque la triaxialité des contraintes $\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}/\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}$ est positive et non nulle, une bonne approximation de cette loi est :

$$\frac{1}{\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{eq}}}\,\frac{\dot{R}}{R} \simeq 0{,}283\,\exp\left(\frac{3}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}\right)\,, \tag{3.60}$$

relation obtenue en ne conservant dans le sinus hyperbolique que l'exponentielle à argument positif, et que l'on prendra garde de ne pas appliquer lorsque $\overline{\sigma}_{\mathsf{m}} = 0$. On trouve ainsi une influence exponentielle de la triaxialité des contraintes $\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}/\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}$ sur la vitesse de croissance des cavités qui semble bien vérifiée expérimentalement [MAR 85].

Cette relation a été discutée par la suite et modifiée, notamment par Huang [HUA 91] qui, en considérant des champs de vitesse plus nombreux et plus riches que ceux retenus par Rice et Tracey, a proposé la loi de croissance suivante :

$$\frac{1}{\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{eq}}}\,\frac{\dot{R}}{R} = \alpha\,\exp\left(\frac{3}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}\right)\,, \tag{3.61}$$

où le facteur préexponentiel α est donné par :

$$\alpha = 0{,}426\left(\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{lorsque} \quad \frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}} \leqslant 1, \quad \alpha = 0{,}426 \quad \text{lorsque} \quad \frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}} \geqslant 1.$$

La relation de Rice et Tracey est fréquemment utilisée en postprocesseur, sous l'une des formes (3.59) ou (3.60), pour prédire le développement de l'endommagement dans une structure élastoplastique. Plus précisément, le calcul de la structure se fait de façon classique et donne en chaque point $\boldsymbol{X}$ de la structure l'histoire $\overline{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{X},t)$ et $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{X},t)$. On calcule ensuite l'évolution du dommage, c'est-à-dire le rayon $R(\boldsymbol{X},t)$ des cavités, par la relation (3.59) ou sa variante (3.60), où $\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{eq}} = \dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathsf{p}}_{\mathsf{eq}}(\boldsymbol{X},t)$. La rupture intervient dès qu'en un point de Gauss de la structure, ou dans un volume suffisant, le rapport de rayon des cavités R/R_0 atteint une valeur critique (R_0 étant le rayon initial des cavités qu'il n'est pas nécessaire de connaître). Ce critère de rupture, très heuristique, dépend de la taille de maille, effet discuté au paragraphe 3.2.9.1 : lorsque le maillage est très fin, la rupture en un point de Gauss ne peut être considérée comme suffisante pour entraîner la rupture de l'éprouvette et le critère doit être atteint dans un volume suffisant autour de ce point. La valeur critique du rapport R/R_0, le plus souvent identifiée par des essais sur éprouvettes entaillées, est le seul paramètre matériau supplémentaire du modèle d'endommagement. Ce critère, dit de Rice et Tracey, peut être interprété comme un critère de ductilité du matériau. A triaxialité $\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}/\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}$ fixée, la relation (3.59) peut être intégrée et le dommage (rayon de la cavité) est alors proportionnel à la déformation plastique, avec une constante de proportionnalité qui dépend de la triaxialité des contraintes.

Il serait intéressant d'étendre l'étude de Rice et Tracey à des matrices dont le comportement n'est pas régi par le critère de von Mises. Des résultats expérimentaux sur le zirconium [CRE 96] font en effet état de vitesses de croissance très importantes dont l'ordre de grandeur est nettement supérieur aux vitesses prédites par la relation (3.59). L'étude de Rice et Tracey a été étendue à la viscoplasticité en loi puissance ($\dot{\varepsilon}_{\mathsf{eq}}$ proportionnel à ${\sigma_{\mathsf{eq}}}^n$) par Budiansky, Hutchinson et Slutsky [BUD 82]. La vitesse de croissance d'une cavité sphérique dans un massif infini viscoplastique est déterminée à l'aide du principe variationnel en milieu infini qui régit le champ de vitesse $\boldsymbol{v}$. Ces auteurs aboutissent à la loi de croissance suivante :

$$\frac{1}{\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{eq}}}\,\frac{\dot{R}}{R} = 0{,}5\left[\frac{3\,m}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}} + (1-m)\left[1 + m\,(0{,}4175 + 0{,}0144\,\chi s)\right]\right]^n ,$$

où s est le signe de $\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}$ et $m = 1/n$. Cette relation redonne la loi de Rice et Tracey lorsque la sensibilité à la vitesse de déformation m tend vers 0.

3.2.3. *Modèles couplés en plasticité : critères elliptiques*

3.2.3.1. *Couplage endommagement-déformation*

Les modèles présentés au paragraphe précédent sont non couplés, car la relation contrainte-déformation macroscopique n'est pas affectée par la présence des cavités, ce qui est une conséquence de l'hypothèse du milieu infini. Dans la suite de ce chapitre, on considère au contraire un volume élémentaire représentatif fini. On se limite dans un premier temps à l'endommagement isotrope. Le seul paramètre d'endommagement retenu est donc la porosité f, qui est non nulle et dont l'évolution est régie par l'équation de conservation de la masse (3.57) ou sa variante (3.58). Nous négligerons ici les déformations élastiques microscopiques ; elles sont en effet petites par rapport aux déformations plastiques dans la plupart des métaux, mais il n'en va pas de même dans les polymères (le couplage entre déformations microscopiques élastique et anélastique introduit alors des complications que nous ne considérerons pas, voir [STE 97]). La vitesse de déformation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est donc purement dissipative (viscoplastique ou plastique) ; elle est régie par le potentiel de dissipation de la matrice :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}), \quad \text{ou inversement} \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) .$$

De la même façon, le comportement macroscopique dérive d'un potentiel :

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}}(f, \overline{\boldsymbol{\sigma}}), \quad \text{ou inversement} \quad \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}(f, \dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) , \tag{3.62}$$

où :

$$\Psi(f, \overline{\boldsymbol{\sigma}}) = \langle \psi(\boldsymbol{\sigma}) \rangle \quad \text{et} \quad \Phi(f, \dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = \langle \varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \rangle . \tag{3.63}$$

La relation (3.62) devient la règle de normalité en plasticité. Le problème de la loi d'évolution de l'endommagement est donc réduit à la détermination de l'un des potentiels Ψ ou Φ. Ces potentiels ne donnent en pratique que la vitesse de déformation anélastique macroscopique, à laquelle on ajoute la vitesse de déformation élastique macroscopique $\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathrm{e}} = \widetilde{\boldsymbol{S}} : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$, où $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ est déterminé par un modèle d'homogénéisation linéaire adapté à la géométrie du VER. Lorsque la porosité est faible, ce qui est en général le cas pour les métaux, la souplesse élastique du milieu endommagé est prise égale à celle de la matrice.

3.2.3.2. *Critères de plasticité elliptiques pour matériaux rigides plastiques poreux*

Le problème considéré ici est celui d'une matrice rigide plastique contenant des vides. La matrice est insensible à la pression hydrostatique et la plasticité

est régie par la contrainte de von Mises $\sigma_{\mathsf{eq}} \leqslant \sigma^y$. Le matériau poreux devient sensible à la pression hydrostatique car l'application d'une pression macroscopique va provoquer des cisaillements locaux et la plasticité va donc se développer à l'échelle microscopique. Pour un milieu isotrope, le critère de plasticité dépend des trois invariants des contraintes macroscopiques $\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}$, $\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}$, et $\det \overline{\boldsymbol{\sigma}}$. Il est d'usage de négliger l'influence du troisième invariant des contraintes, ce qui semble licite pour des milieux poreux au vu des calculs par éléments finis de [RIC 94] effectués sur des cellules cubiques. Parmi les premiers auteurs à avoir considéré ce problème, Berg [BER 70] propose d'écrire le critère sous la forme :

$$\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}^2 + g(\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}) - K^2 = 0\,,$$

où g et K sont des caractéristiques du matériau à déterminer. La forme « elliptique » du critère (g fonction quadratique de $\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}$) est certainement la plus simple que l'on puisse imaginer. Shima et Oyane [SHI 76] ont par exemple proposé le critère suivant, à partir d'essais sur cuivre fritté :

$$\left(\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}{\sigma^y}\right)^2 + 6{,}2\ f^{1{,}028}\ \left(\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\sigma^y}\right)^2 - (1-f)^5 = 0\,.$$

Il est, de plus, intéressant de noter que les théories récentes de bornes non linéaires [PON 91], [SUQ 92], conduisent également à une forme elliptique du critère (voir (2.94)) :

$$\begin{gathered}\frac{1}{B(f)}\left(\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}{\sigma^y}\right)^2 + \frac{1}{A(f)}\ \left(\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\sigma^y}\right)^2 - (1-f)^2 = 0,\\ A(f) = \frac{4}{9f}, \quad B(f) = \frac{1}{1+\frac{2}{3}f}\,.\end{gathered} \tag{3.64}$$

La contrainte d'écoulement sous traction hydrostatique prévue par ce modèle est trop grande ; en modifiant le coefficient $A(f)$ en $A(f) = \left(\frac{2}{3}\,\frac{\log f}{1-f}\right)^2$ [MIC 92], on retrouve pour contrainte d'écoulement hydrostatique $\overline{\sigma}_{\mathsf{m}} = -\frac{2}{3}\log f$, valeur exacte pour une sphère creuse.

L'avantage des critères elliptiques est leur simplicité. Leur inconvénient est qu'ils prédisent une vitesse de croissance du dommage qui est une fonction linéaire de la triaxialité des contraintes macroscopiques. En effet, pour un critère elliptique de la forme (3.64), la vitesse de croissance qui se déduit de la règle de normalité est :

$$\frac{\dot{f}}{f\,\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{eq}}} = 3\,\frac{1-f}{f}\,\frac{\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{m}}}{\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{eq}}} = \frac{1-f}{f}\,\frac{B(f)}{A(f)}\,\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}\,. \tag{3.65}$$

Cette dernière expression est en contradiction avec l'influence exponentielle de la triaxialité des contraintes sur la vitesse de croissance des cavités qui est observée expérimentalement et traduite par la relation de Rice et Tracey (3.59).

3.2.4. *Modèles couplés : le critère de Gurson*

3.2.4.1. *Matrice parfaitement plastique*

L'un des premiers critères couplés non elliptiques est celui proposé par Gurson [GUR 77], élève de Rice. Ce critère[1] s'écrit :

$$\mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma^y, f) = \left(\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}{\sigma^y}\right)^2 + 2f\cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\sigma^y}\right) - 1 - f^2 = 0\,, \tag{3.66}$$

où σ^y est la limite d'élasticité de la matrice. La vitesse de déformation macroscopique, purement plastique puisque les déformations élastiques sont négligées, suit la loi de normalité :

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathsf{p}} = \dot{\lambda}\overline{\boldsymbol{g}}, \quad \overline{\boldsymbol{g}} = \alpha\,\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}\overline{\boldsymbol{s}}, \quad \alpha = \frac{1}{2}f\sinh\left(\frac{3}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\sigma^y}\right),$$

où $\dot{\lambda}$ est, à une constante multiplicative près, le multiplicateur plastique introduit par la loi de normalité. Le modèle de Gurson est donc un modèle couplant endommagement et plasticité; sa mise en œuvre, sous sa forme originale, ne nécessite qu'un paramètre matériau qui est la porosité initiale f_0.

La loi d'évolution du dommage qui résulte de (3.58) s'écrit alors :

$$\frac{\dot{f}}{f\,\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{eq}}} = \frac{3}{2}(1-f)\sinh\left(\frac{3}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\sigma^y}\right)\left[1 + f^2 - 2f\cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\sigma^y}\right)\right]^{-1/2}.$$

A faible porosité ($f \ll 1$, $\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}} \simeq \sigma^y$) et pour des cavités sphériques, cette loi de croissance se réduit à :

$$\frac{1}{\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{eq}}}\,\frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{eq}}}\,\frac{\dot{f}}{3\,f} = 0{,}5\,\sinh\left(\frac{3}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}\right).$$

On rapprochera cette relation de la loi de Rice et Tracey (3.59).

Si la démarche conduisant au critère de Gurson a été notablement améliorée depuis sa version initiale, notamment dans [PER 92], il est tout de même très intéressant de la détailler. On considère pour cela une sphère creuse de rayon interne a et de rayon externe A soumise à une vitesse de déformation macroscopique $\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ qui peut être prise, sans perte de généralité, sous la forme :

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\overline{\varepsilon}}_{11}\,\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \dot{\overline{\varepsilon}}_{22}\,\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \dot{\overline{\varepsilon}}_{33}\,\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3\,.$$

[1] Le critère de Rousselier [ROU 87] présente de grandes analogies avec celui de Gurson. Il est intéressant de remarquer qu'il a été obtenu par une démarche thermodynamique, totalement différente de celle de Gurson. Nous ne le commenterons pas d'avantage, malgré son intérêt, car il ne relève pas d'une démarche micro-macro.

La matrice M est rigide plastique et régie par le potentiel $\varphi(\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = \sigma^y\, \dot{\varepsilon}_{\mathsf{eq}}$. Le potentiel de la cavités est évidemment nul. Le potentiel de dissipation effectif Φ de ce volume simplifié V est donné par le minimum de la moyenne de la dissipation plastique sur le VER parmi les champs de vitesse $\boldsymbol{v}$ compatibles avec la vitesse de déformation $\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$:

$$\Phi(f, \dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = \inf_{\boldsymbol{v}} \frac{1}{|V|} \int_M \varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}V\,.$$

Gurson décompose le champ $\boldsymbol{v}$ en une contribution $\boldsymbol{v}^v$ correspondant à un changement de volume de la cavité sans changement de forme, et une contribution $\boldsymbol{v}^f$ correspondant à un changement de forme sans changement de volume :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^v + \boldsymbol{v}^f, \qquad \boldsymbol{v}^v = \frac{\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{m}}\, A^3}{r^2}\, \boldsymbol{e}_r\,, \quad \boldsymbol{v}^f = \dot{\overline{\boldsymbol{e}}} \cdot \boldsymbol{x}\,, \tag{3.67}$$

où $\dot{\overline{\boldsymbol{e}}}$ est le déviateur de $\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, (r, θ, ϕ) désignent les coordonnées sphériques classiques et $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi)$ la base associée. Un calcul simple donne :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}^2_{\mathsf{eq}}(\boldsymbol{v}) = \dot{\overline{\varepsilon}}^2_{\mathsf{eq}} \;+\; \frac{4\,\dot{\overline{\varepsilon}}^2_{\mathsf{m}}\, A^6}{r^6} - \frac{4\,\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{m}}\, A^3}{r^3} \Bigg[\dot{\overline{\varepsilon}}_{11} \left(\cos^2\phi\, \sin^2\theta - \frac{1}{3} \right) \\ + \dot{\overline{\varepsilon}}_{22} \left(\sin^2\phi\, \sin^2\theta - \frac{1}{3} \right) + \dot{\overline{\varepsilon}}_{33} \left(\cos^2\theta - \frac{1}{3} \right) \Bigg]\,.\end{aligned} \tag{3.68}$$

Le potentiel effectif est donc majoré par :

$$\Phi(f, \dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \leqslant \frac{3\,\sigma^y}{4\pi A^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^A \dot{\varepsilon}_{\mathsf{eq}}(r, \theta, \phi)\, r^2\, \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi\,.$$

Par l'inégalité de Schwarz, $\int fg \leqslant \sqrt{\int f^2}\, \sqrt{\int g^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \dot{\varepsilon}_{\mathsf{eq}}(r, \theta, \phi)\, \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \\ &\qquad \leqslant \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \dot{\varepsilon}^2_{\mathsf{eq}}(r, \theta, \phi)\, \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

La dernière intégrale double est immédiate et vaut 4π, celle qui précède se calcule d'après (3.68) :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \dot{\varepsilon}^2_{\mathsf{eq}}(r, \theta, \phi)\, \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \;=\; 4\pi \left(\dot{\overline{\varepsilon}}^2_{\mathsf{eq}} \;+\; \frac{4\,\dot{\overline{\varepsilon}}^2_{\mathsf{m}}\, A^6}{r^6} \right)\,,$$

et l'on obtient finalement, après le changement de variable $y = (r/A)^3$:

$$\Phi(\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \leqslant \sigma^y \int_f^1 \left(\dot{\overline{\varepsilon}}^2_{\mathsf{eq}} \;+\; \frac{4\,\dot{\overline{\varepsilon}}^2_{\mathsf{m}}}{y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y\,. \tag{3.69}$$

Il reste à utiliser le résultat suivant (voir [GAR 97], par exemple, pour une preuve sous une forme plus élaborée) : la fonction $\int_f^1 \left(a^2\dot{\varepsilon}_{\mathsf{eq}}^2 + b^2\dot{\varepsilon}_{\mathsf{m}}^2/y^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y$ est le potentiel de dissipation associé au critère :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{\sigma_{\mathsf{eq}}}{a}\right)^2 + 2\,f\cosh\left(\frac{3\,\sigma_{\mathsf{m}}}{b}\right) - 1 - f^2 = 0\,.$$

Il suffit d'appliquer ceci à la majoration (3.69) pour conclure que la surface d'écoulement macroscopique de la sphère creuse est située à l'intérieur de la surface donnée par le critère de Gurson (3.66).

Soulignons deux caractéristiques du critère de Gurson qui ressortent bien de la preuve qui vient d'être donnée. Tout d'abord, ce critère est une borne supérieure rigoureuse pour la sphère creuse. Par reproduction de motifs, c'est également une borne supérieure pour tout assemblage, de type Hashin, de sphères creuses autosemblables. En revanche, on ignore s'il s'agit d'une borne supérieure pour tout milieu poreux isotrope. D'autre part, ce caractère de borne supérieure s'applique à tout taux de déformation $\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ et non aux seuls états axisymétriques auxquels était limitée l'analyse initiale de Gurson.

3.2.4.2. *Comparaison avec des simulations numériques*

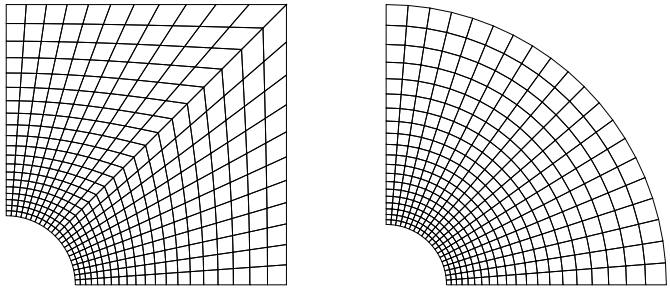
Il est possible d'évaluer numériquement la surface d'écoulement pour des matériaux poreux à partir de représentations simples du VER telles que des cellules axisymétriques, qui sont d'assez bonnes approximations de réseaux périodiques tridimensionnels. Deux exemples de telles cellules sont donnés sur la figure 3.11. La cellule cylindrique génère par périodicité le réseau tridimensionnel de cavités représenté sur la figure 3.5 du chapitre 3 du tome 1. La cellule sphérique génère, après homothétie et translation, un empilement de sphères de Hashin. On considère des états de contrainte macroscopiques axisymétriques :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} \;=\; T\,(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2) \;+\; S\,\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3\,, \tag{3.70}$$

et le champ de vitesse $\boldsymbol{v}$ peut être décomposé en une partie moyenne $\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \boldsymbol{x}$ et un terme correcteur $\boldsymbol{v}^\star$:

$$v_r(\boldsymbol{x}) = \dot{\overline{\varepsilon}}_{11}\,r + v_r^\star(r,z), \quad v_\theta(\boldsymbol{x}) = 0, \quad v_z(\boldsymbol{x}) = \dot{\overline{\varepsilon}}_{33}\,z + v_z^\star(r,z)\,. \tag{3.71}$$

On impose au bord de la cellule cylindrique des conditions aux limites qui reproduisent au mieux les conditions de périodicité du réseau tridimensionnel $\boldsymbol{v}^\star(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0$ sur ∂V. Elle conserve ainsi sa forme cylindrique au cours de la déformation, avec un bord latéral droit et des bases planes, mais dans le cas de la cellule sphérique les conditions aux limites sont choisies pour permettre une extension cinématique du champ de vitesse dans l'assemblage des sphères



(a) (b)

Figure 3.11. *Cavité sphérique dans une cellule axisymétrique cylindrique (a) ou sphérique (b)*

de Hashin. Ce sont donc des conditions de déformations homogènes au contour $\boldsymbol{v}^\star(\boldsymbol{x}) = 0$ sur ∂V. Le tenseur vitesse de déformation macroscopique est lui aussi axisymétrique :

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{|V|}\int_{\partial V} \boldsymbol{v} \otimes_s \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \dot{\bar{\varepsilon}}_{11}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2) + \dot{\bar{\varepsilon}}_{33}\,\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3\,. \tag{3.72}$$

Lorsque la direction de contrainte macroscopique, c'est-à-dire le rapport S/T, est imposée, les composantes $\dot{\bar{\varepsilon}}_{11} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{22}$ et $\dot{\bar{\varepsilon}}_{33}$ du taux de déformation macroscopique ne sont pas connues mais sont déduites du calcul, ce qui est une caractéristique classique des calculs en homogénéisation et plasticité.

La figure 3.12 présente les résultats de simulations numériques effectuées par J.-C. Michel pour une porosité de 1 %. La borne supérieure (3.64) est bien un majorant de la surface d'écoulement réelle, mais sa prédiction pour des contraintes à forte composante hydrostatique est irréaliste. Les deux cellules, cylindrique et sphérique, conduisent à des résultats assez proches. Le modèle de Gurson, bien adapté par construction à la cellule sphérique, est celui qui approche le mieux les résultats numériques ; il possède bien le caractère de majorant rigoureux qui résulte de sa construction.

3.2.4.3. *Modèles couplés en viscoplasticité*

Le cas d'une matrice viscoplastique en loi puissance contenant des cavités sphériques distribuées de façon isotrope a été abordé par différents auteurs. On retrouve dans ces travaux des potentiels elliptiques qui sont fonction

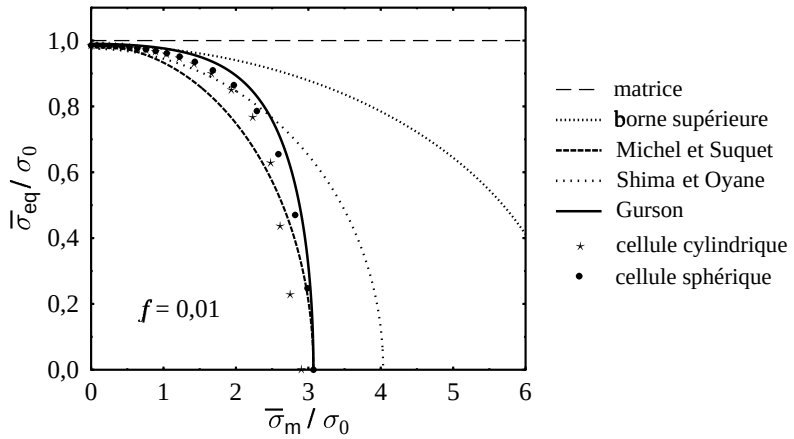


Figure 3.12. *Surface seuil pour un matériau poreux, $f = 0{,}01$. Comparaison entre des modèles analytiques et des calculs par éléments finis sur cellule axisymétrique*

d'une contrainte macroscopique « équivalente » de la forme $\left(A\,\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}^2 + B\,\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}^2\right)^{1/2}$. De tels modèles de comportement ont été proposés par [MIC 92] et [SOF 92], entre autres ; ils ont été appliqués à la compaction de poudres par [ABO 88] et [BON 98], par exemple. Comme en plasticité (équation (3.65)), ces modèles basés sur des potentiels elliptiques conduisent à une dépendance linéaire du taux de croissance des cavités par rapport au taux de triaxialité des contraintes, ce qui est une limitation.

Une approche différente, suivie dans [GAR 00] et [LEB 94], généralise la démarche de Gurson aux matrices viscoplastiques en loi puissance. La décomposition du champ de vitesse en changement de forme et changement de volume conduit à la majoration (assimilée à une estimation) suivante du potentiel [GAR 00] :

$$\Phi(f, \dot{\overline{\varepsilon}}) \leqslant \frac{1}{m+1} \frac{\sigma^y}{\dot{\varepsilon}_0{}^m} \int_f^1 \left(\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{eq}}^2 + \frac{4\,\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{m}}^2}{y^2} \right)^{\frac{m+1}{2}} \mathrm{d}y \,. \tag{3.73}$$

La prédiction des vitesses de croissance des cavités par ce modèle est en bon accord avec les simulations par éléments finis dans une large gamme de porosité et de triaxialité.

3.2.4.4. *Prise en compte de l'écrouissage*

Lorsque la matrice est écrouissable, le seuil de plasticité σ^y qui figure dans le critère de Gurson dépend de la déformation plastique de la matrice, laquelle n'est pas homogène dans l'épaisseur de la sphère creuse. La question se pose alors de définir l'état d'écrouissage « effectif » de la matrice. Dans l'approche initiale de Gurson, la prise en compte de l'écrouissage se fait en introduisant une variable ε^M qui représente la déformation plastique effective du VER. Le seuil de plasticité effectif de la matrice est alors $\sigma^M = \sigma^y(\varepsilon^M)$ et l'évolution de la variable interne ε^M se déduit d'un bilan de dissipation plastique :

$$(1-f)\,\sigma^M\,\dot{\varepsilon}^M = \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathsf{p}}\,. \tag{3.74}$$

La vitesse de déformation plastique $\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathsf{p}}$ est donnée par la règle de normalité à partir du critère de Gurson :

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathsf{p}} = \dot{\lambda}\,\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma^M, f), \quad \dot{\varepsilon}^M = \frac{\dot{\lambda}}{(1-f)\,\sigma^M}\,\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma^M, f) : \overline{\boldsymbol{\sigma}}\,,$$

et le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ se déduit de la relation de cohérence et de la courbe d'écrouissage de la matrice :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma^M}\dot{\sigma}^M + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f}\dot{f} = 0, \quad \dot{\sigma}^M = h(\varepsilon^M)\,\dot{\varepsilon}^M, \quad h(\varepsilon^M) = \frac{\mathrm{d}\sigma^y}{\mathrm{d}\varepsilon^M}\,.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathsf{p}} &= \frac{\left(\overline{\boldsymbol{g}} : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\right)^+}{H}\,\overline{\boldsymbol{g}}\,, \qquad \overline{\boldsymbol{g}} = \alpha\,\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}\overline{\boldsymbol{s}}\,, \qquad \alpha = \frac{1}{2} f\,q_1 \sinh\left(\frac{3}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\sigma^M}\right)\,, \\ H &= -\frac{\sigma^M}{2}\left\{\frac{h}{1-f}\left[\left(\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}{\sigma^M}\right)^2 + 3\,\alpha\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\sigma^M}\right]\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma^M} + 3\,\alpha(1-f)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f}\right\}\,. \end{aligned} \tag{3.75}$$

3.2.5. *Critère de Gurson, Tvergaard et Needleman*

Plusieurs modifications ont progressivement été apportées au critère de Gurson avec le développement de ses applications, notamment par Tvergaard et Needleman [TVE 81], [TVE 84], [TVE 90b]. Ces modifications conduisent essentiellement à des paramètres ajustables supplémentaires, sans que la forme du critère soit fondamentalement remise en cause. Le critère de Gurson, Tvergaard et Needleman (G.T.N.) s'écrit :

$$\mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma^y, f^\star) = \left(\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}{\sigma^y}\right)^2 + 2\,q_1 f^\star \cosh\left(\frac{3\,q_2}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\sigma^y}\right) - 1 - q_3(f^\star)^2 = 0\,, \tag{3.76}$$

où, en plus d'une porosité effective $f^\star$ définie plus bas, interviennent trois paramètres q_1, q_2 et q_3. Ils ont été introduits par Tvergaard [TVE 81] pour, d'une part, donner un meilleur accord avec des prévisions de localisation de l'endommagement effectuées par éléments finis et, d'autre part, corriger une insuffisance du critère de Gurson. Celui-ci prévoit en effet une contrainte d'écoulement en cisaillement pur égale à $(1-f)\sigma^y$ et la perte complète de résistance du matériau ne se produit donc que pour une porosité de 100 %, or cette valeur est bien trop grande. Un bon accord est observé avec $q_2 = 1$ et $q_3 = q_1^2$, ce qui revient à remplacer dans le critère initial de Gurson la porosité f par une porosité apparente $q_1 f$. Les valeurs de q_1 diffèrent selon les auteurs : $q_1 = 1$ pour Gurson, $q_1 = 1{,}5$ pour Tvergaard, $q_1 = 1{,}25$ pour Koplik et Needleman [KOP 88]. Perrin et Leblond [PER 90] obtiennent $q_1 = 4/e \simeq 1{,}47$ à l'aide d'un modèle autocohérent basé sur le problème de la sphère creuse placée dans un massif infini lui-même poreux, obéissant au critère G.T.N., sous chargement hydrostatique. Une interprétation géométrique simple de ce paramètre q_1 peut être avancée : pour une cavité sphérique de rayon a dans une cellule cylindrique de rayon A et de hauteur $2A$, la porosité réelle de la cavité est $f = \frac{2}{3}(\frac{a}{A})^3$, mais la matrice située en dehors de la sphère de rayon A et inscrite dans le cylindre est une « zone morte » ; la porosité « effective » est donc $(\frac{a}{A})^3 = 1{,}5f$. Le paramètre q_1 permet de tenir compte de cette indétermination de la porosité pour un VER où les cavités de forme sphérique ne sont disposées ni selon un empilement de sphères de Hashin (auquel cas $q_1 = 1$), ni selon un empilement de cylindres (auquel cas $q_1 = 1{,}5$), mais dans une configuration intermédiaire. Pour appuyer cette remarque, on a porté sur la figure 3.13 les surfaces de plasticité correspondant à $q_1 = 1$, 1,25 et 1,5, ainsi que les simulations par éléments finis pour les cellules cylindrique et sphérique. Le choix intermédiaire $q_1 = 1{,}25$ paraît fournir la meilleure approximation des résultats numériques.

L'introduction du paramètre q_1 ne suffit pas à expliquer la rapide croissance de la porosité observée au voisinage de la coalescence [KOP 88]. Il a alors été proposé d'introduire une accélération de la porosité en remplaçant la porosité vraie f par une porosité effective $f^\star$ donnée en fonction de f par deux segments de droite :

$$f^\star = \begin{cases} f \quad \text{si} \quad f \leqslant f_c\,, \\ f_c + \dfrac{1/q_1 - f_c}{f_F - f_c}(f - f_c) \quad \text{si} \quad f \geqslant f_c\,. \end{cases} \tag{3.77}$$

f_c est la porosité à partir de laquelle la porosité effective $f^\star$ croît plus vite que la porosité vraie f (ce que l'on peut interpréter comme une amorce de coalescence), f_F étant la valeur de la porosité vraie pour laquelle la rupture se déclenche (ce que l'on peut interpréter comme la fin de la coalescence). La ruine du matériau se produit lorsque $f^\star = 1/q_1$ (alors $f = f_F$). Cette accélération de la convergence introduit deux constantes matériau supplémentaires f_c et f_F, en plus de la porosité initiale f_0 et du facteur q_1.

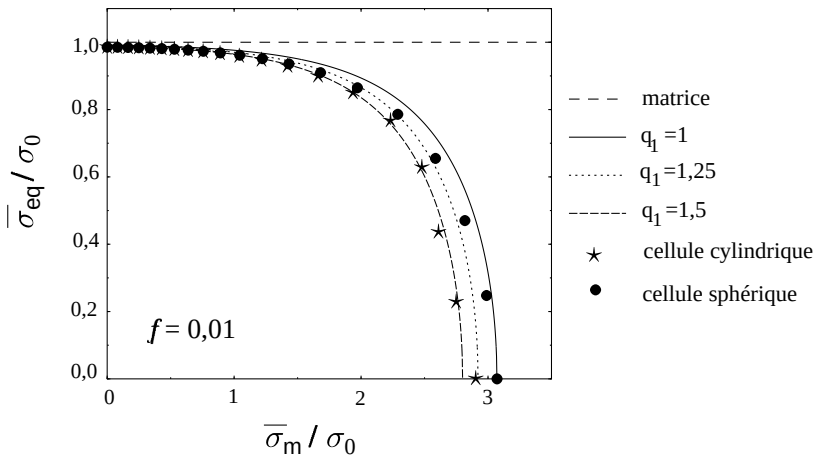


Figure 3.13. *Surface seuil pour un matériau poreux, $f = 0{,}01$. Comparaison entre critère G.T.N., avec différentes valeurs de q_1, et calculs par éléments finis sur cellule axisymétrique*

3.2.6. *Autres extensions du modèle de Gurson*

3.2.6.1. *Prise en compte de l'écrouissage*

Mear et Hutchinson [MEA 85] ainsi que Perrin [PER 92] ont remarqué que la prise en compte de l'écrouissage dans le modèle initial de Gurson conduit à une surestimation de la vitesse de croissance des cavités. En effet, l'hétérogénéité de déformation plastique se traduit physiquement par des déformations plastiques plus importantes au bord de la cavité, donc un écrouissage (durcissement) plus fort qui ralentit la croissance de celle-ci. Pour prendre en compte cette hétérogénéité de la déformation plastique, Perrin propose d'introduire deux variables macroscopiques d'écrouissage :

$$\varepsilon_{\mathsf{eq}}^M(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\,\dot{\overline{\varepsilon}}^p : \dot{\overline{\varepsilon}}^p}\,\mathrm{d}s \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{\mathsf{m}}^M(t) = \int_0^t \left|\dot{\overline{\varepsilon}}_{\mathsf{m}}^p\right| \mathrm{d}s\,,$$

auxquelles correspondent deux limites d'élasticité σ_1^M et σ_2^M dépendant de la porosité initiale f_0 [PER 92]. Le critère du milieu poreux écrouissable s'écrit :

$$\mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma_1^M, \sigma_2^M, f) = \left(\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}{\sigma_1^M}\right)^2 + 2\,f\cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\sigma_2^M}\right) - 1 - f^2 = 0\,, \qquad (3.78)$$

et il est possible d'y introduire également le paramètre q_1 ainsi que la porosité modifiée $f^\star$. Ce modèle a été validé pour des chargements monotones [LEB 95] et pour des chargements cycliques [DEV 95].

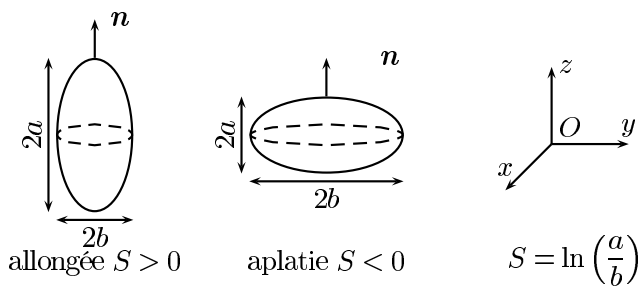


Figure 3.14. *Cavités ellipsoïdales de révolution d'axe* $\boldsymbol{n}$ *parallèle à la direction* z

3.2.6.2. *Prise en compte du changement de forme des cavités*

Le modèle G.T.N. considère que les cavités sont initialement sphériques et qu'elles le restent au cours de la déformation, or il est manifeste que cette hypothèse n'est pas satisfaite car les cavités se déforment et, sauf pour des triaxialités très importantes, perdent leur forme sphérique initiale. Pour évaluer l'effet des changements de géométrie, Koplik et Needleman [KOP 88] ont effectué des calculs numériques sur cellules axisymétriques. La matrice est écrouissable (écrouissage isotrope positif) et les grandes transformations sont prises en compte, tant au niveau de la formulation du comportement que des changements de géométrie (cavité et bord extérieur). Les triaxialités considérées sont relativement importantes ($\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}/\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}} = 1$, 2 et 3[2]). Dans un premier temps se développe une déformation plastique de la matrice qui, si elle n'est pas homogène, intéresse une large zone et la cavité conserve une forme raisonnablement ellipsoïdale avec une excentricité qui évolue. Le régime de déformation change ensuite, ce qui correspond à une instabilité de structure du VER : la déformation se concentre dans le ligament situé à l'équateur de la cavité, il subit une striction et la déformation s'y concentre. Elle se poursuit alors uniquement par propagation de la striction dans cette zone ligamentaire. Cette localisation de la déformation s'accompagne d'une chute brutale de la courbe contrainte-déformation macroscopique et peut être interprétée comme la phase de coalescence des cavités que nous aborderons au paragraphe suivant.

La prise en compte du changement de forme des cavités peut se faire en considérant dans un premier temps des cavités de forme ellipsoïdale. Des expressions du critère de plasticité de matériaux poreux contenant de telles cavités

[2] Pourquoi ne pas avoir étudié le cas de la traction simple, où la triaxialité vaut 1/3 ? En fait, le calcul montre qu'il n'apparaît alors pas d'instabilité de type coalescence pour une cellule axisymétrique contenant une seule cavité, au moins pour des valeurs raisonnables de la déformation

allongées [GOL 93] ou aplaties [GOL 94] ont été proposées en faisant l'hypothèse que la forme des cavités et celle de leur distribution sont confocales ; ces résultats ont été récemment simplifiés et améliorés [GOL 97a]. Le facteur d'allongement de la cavité selon son axe de révolution (figure 3.14) est une nouvelle variable interne S du modèle. La surface seuil dépend maintenant à la fois de la porosité et du facteur de forme et prend la forme suivante [GOL 97a] :

$$\mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, f, S) = \frac{3\,C}{2}\,\frac{(\overline{\boldsymbol{s}} + \eta\,\overline{\sigma}_h \boldsymbol{X}) : (\overline{\boldsymbol{s}} + \eta\,\overline{\sigma}_h \boldsymbol{X})}{(\sigma^y)^2} + 2\,q_w(g+1)(g+f)\cosh\left(\frac{\kappa\,\overline{\sigma}_h}{\sigma^y}\right) - (g+1)^2 - {q_w}^2(g+f)^2\,, \quad (3.79)$$

avec $\overline{\sigma}_h = \alpha_2(\overline{\sigma}_{xx} + \overline{\sigma}_{yy}) + (1 - 2\,\alpha_2)\overline{\sigma}_{zz}$. Les coefficients C, η, $\boldsymbol{X}$, q_w, g, κ et α_2 dépendent uniquement de la porosité et du facteur de forme. Le coefficient g est nul pour $S \geqslant 0$. Le terme en cosinus hyperbolique ne dépend plus de la contrainte moyenne $\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}$ mais d'une contrainte $\overline{\sigma}_h$ faisant intervenir les contraintes selon l'axe de la cavité $\overline{\sigma}_{zz}$ et les contraintes dans les deux directions perpendiculaires, avec des poids différents. L'évolution de la porosité est donnée par la conservation de la masse ; les variations de S dépendent de f, de S et du tenseur de vitesse de déformation plastique. Plusieurs cas particuliers sont à envisager :

- si $S \to +\infty$ la cavité est un cylindre d'axe Oz, alors $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ de sorte que $\overline{\sigma}_h$ ne dépend que des contraintes dans les directions perpendiculaires à l'axe de la cavité. En particulier, une traction simple selon Oz n'engendre pas de variation de volume ;
- si $S = 0$ on se trouve dans le cas du modèle de Gurson ;
- si $S \to -\infty$ la cavité est une fissure plane circulaire, son volume est nul ($f = 0$) ; l'endommagement est alors seulement représenté par le paramètre g. Si $g \ll 1$ on peut montrer que l'endommagement mécanique engendré pas une fissure est le même que celui causé par une cavité sphérique de même surface projetée.

A ce critère il faut adjoindre une équation d'évolution de forme des cavités, c'est-à-dire de la variable interne S. Celle-ci ne résulte pas d'une équation de conservation du type (3.57), mais d'une approximation aussi précise que possible du champ de vitesse $\boldsymbol{v}$ au bord des cavités, ce qui est détaillé dans [GAR 96] et [GOL 97a]. Le cas de cavités ellipsoïdales dans une matrice viscoplastique en loi puissance a été traité dans [GAR 96] et [GAR 00] à l'aide d'une majoration de la forme (3.73).

Une autre approche, assez différente de celle qui vient d'être exposée, a été développée dans [KAI 97a] et [KAI 97b]. Elle est basée sur la théorie variationnelle des composites non linéaires qui permet d'obtenir une estimation des propriétés effectives de milieux poreux non linéaires (il s'agit en l'occurrence

des potentiels Φ et Ψ de l'équation (3.63)). Plus précisément, les propriétés effectives linéaires de milieux poreux contenant des cavités ellipsoïdales ayant un rapport de forme donné et disposées selon une distribution également ellipsoïdale, mais avec un autre rapport de forme, peuvent être obtenues à l'aide des bornes de type Hashin et Shtrikman établies par Ponte Castañeda et Willis [PON 95]. Ces estimations linéaires, couplées à un principe variationnel non linéaire, équivalent, comme cela a déjà été souligné au chapitre 2, à une théorie de second moment et fournissent une estimation des propriétés effectives non linéaires de milieux poreux. Les champs de vitesse du milieu linéaire de comparaison peuvent être utilisés pour estimer le champ de vitesse local dans la matrice, notamment au bord des cavités. On obtient ainsi des équations d'évolution explicites pour le comportement du milieu poreux, pour la distribution des centres des cavités et pour les orientations et rapports de forme de celles-ci, sans restriction sur la forme du chargement ou des cavités. Une implantation de ce modèle dans un calcul de structure macroscopique a été présenté dans [ARA 99]. Des comparaisons avec des calculs par éléments finis ont montré qu'il est meilleur que les extensions du modèle de Gurson à faible triaxialité, mais moins bon à haute triaxialité, la limite se situant vers $\sigma_{\mathsf{m}}/\sigma_{\mathsf{eq}} \simeq 1$.

3.2.6.3. *Prise en compte de l'anisotropie plastique initiale*

De très nombreux matériaux présentent, du fait de leur mode d'élaboration (laminage, extrusion), une anisotropie plastique marquée. C'est pourquoi le modèle G.T.N. a été étendu afin de pouvoir traiter les matériaux obéissant au critère de Hill [HIL 50] : [BEN 97], [DOE 95], [PRA 98]. La surface d'écoulement prend alors la forme suivante :

$$\left(\frac{\overline{\sigma}_H}{\sigma^y}\right)^2 + 2q_1 f^\star \cosh\left(\frac{3}{h} q_2 \frac{\overline{\sigma}_m}{\sigma^y}\right) - 1 - q_1^2\, f^{\star 2} = 0\,, \tag{3.80}$$

où $\overline{\sigma}_H$ est la contrainte de Hill donnée par :

$$\overline{\sigma}_H^2 = \frac{3}{2}\left(h_{11}\overline{s}_{11}^2 + h_{22}\overline{s}_{22}^2 + h_{33}\overline{s}_{33}^2 + 2h_{12}\overline{s}_{12}^2 + 2h_{23}\overline{s}_{23}^2 + 2h_{31}\overline{s}_{31}^2\right)\,, \tag{3.81}$$

$\overline{s}$ désignant le déviateur des contraintes. Le coefficient h apparaissant dans le terme en cosinus hyperbolique de l'équation (3.80) vaut :

$$h = \sqrt{\frac{8}{5}\frac{h_{11}+h_{22}+h_{33}}{h_{11}h_{22}+h_{11}h_3+h_{22}h_{33}} + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{h_{12}}+\frac{1}{h_{23}}+\frac{1}{h_{31}}\right)}\,. \tag{3.82}$$

En pratique, h reste toujours proche de 2, qui est la valeur obtenue pour un matériau isotrope.

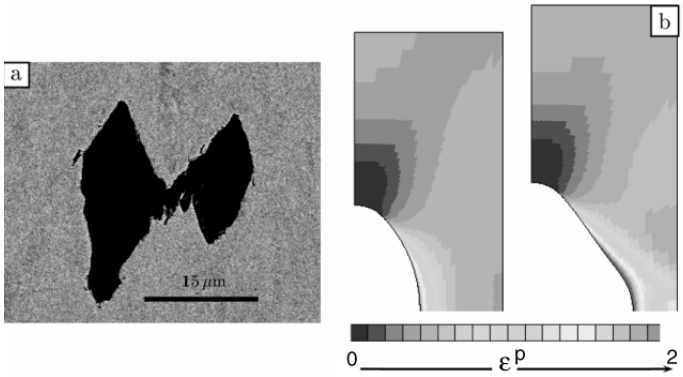


Figure 3.15. *(a) Coalescence de deux cavités dans un acier contenant des inclusions de sulfure de manganèse. (b) Simulation numérique de la localisation de la déformation plastique dans les ligaments entre cavités par un calcul de cellule élémentaire axisymétrique. Taux de triaxialité des contraintes égal à 1, cavité initialement sphérique logée dans un cylindre d'élancement unité*

3.2.7. *Coalescence*

La coalescence est l'étape ultime de la croissance et de la déformation des vides. Le modèle de Gurson a été critiqué pour sa faiblesse à décrire ce stade, principalement parce que les champs de vitesse choisis dans l'approche originale ne représentent pas la forte hétérogénéité des déformations qui, en phase de coalescence, s'apparentent à des strictions localisées dans les ligaments entre cavités. En fait, Gurson avait proposé des mécanismes d'écoulement plastique par blocs, mais les auteurs qui l'ont suivi n'ont pas retenu cet aspect de ses travaux. Par contre, Richelsen et Tvergaard [RIC 94] ont observé que, si le modèle de Gurson original est effectivement inapte à rendre compte correctement de la coalescence, le critère modifié, notamment avec accélération de la porosité par l'introduction de $f^\star$, en est capable à la fois qualitativement et quantitativement. Il n'en reste pas moins que ce modèle modifié exige l'introduction de quantités supplémentaires, f_c et f_F, dont l'évaluation reste vague. Pour s'affranchir de ces paramètres ajustables, d'autres auteurs ont proposé des modélisations où la coalescence est liée à la formation de couches fortement poreuses dans lesquelles la déformation plastique se localise dans les ligaments entre cavités. Ce phénomène peut être observé expérimentalement (figure 3.15*a*) ou simulé par des calculs sur cellules élémentaires (figure 3.15*b*).

D'autres approches de la coalescence ont été proposées. Perrin [PER 92] considère la matrice poreuse comme un stratifié constitué d'une couche riche en cavités (zone ligamentaire) et d'une zone de matrice pure (zone située loin de la cavité). La porosité relative de la zone poreuse est supérieure à la po-

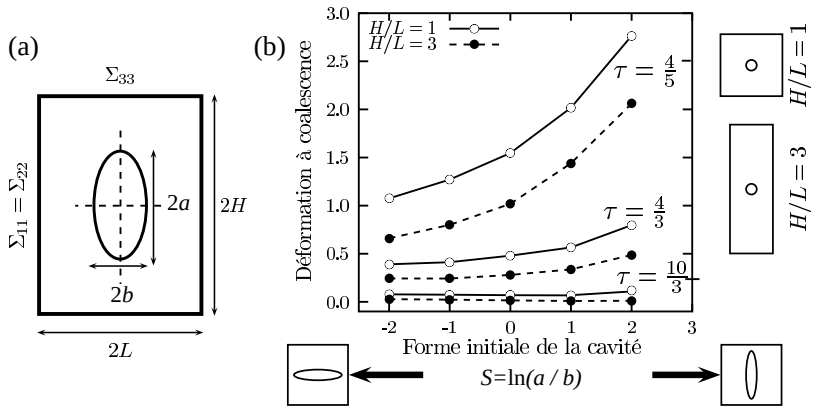


Figure 3.16. *Modèle de Thomason : (a) cellule de base, (b) déformation à coalescence en fonction du facteur de forme initial de la cavité pour trois taux de triaxialité des contraintes et deux espacements initiaux*

rosité d'ensemble, ce qui accélère, mais d'une façon moins artificielle que par l'introduction de $f^\star$, la porosité dans la zone qui va rompre en premier et entraîner la ruine totale. Thomason [THO 68], [THO 85], a proposé une analyse par mécanismes de blocs rigides à partir de volumes élémentaires simplifiés, les cavités étant assimilées à des cubes, que nous décrivons brièvement. On suppose que la coalescence débute quand le ligament entre cavités atteint sa charge limite ; la déformation se localise alors fortement, comme le montrent les calculs sur cellules élémentaires. La condition de coalescence est écrite en considérant l'équilibre du ligament (les notations sont décrites sur la figure 3.16) :

$$\pi(L^2 - b^2)\,\mathcal{C}_f\,\sigma^y = \pi L^2\,\overline{\sigma}_{33}\,, \tag{3.83}$$

c'est-à-dire que la force dans la direction du chargement, exprimée dans le ligament (membre de gauche), est égale à la force appliquée sur le ligament (membre de droite). La cavité induit une concentration de contraintes dans le ligament, de sorte que les contraintes dans la direction du chargement sont plus élevées que la limite d'élasticité σ^y. Cet effet est pris en compte par le coefficient $\mathcal{C}_f$ dans l'équation précédente. Dans le cas d'une cavité axisymétrique, $\mathcal{C}_f$ a été calculé par une méthode de borne supérieure [THO 85] :

$$\mathcal{C}_f = 0{,}1\left(\frac{L-b}{a}\right)^2 + 1{,}2\sqrt{\frac{L}{b}}\,. \tag{3.84}$$

En remarquant que $\overline{\sigma}_{33} = 2\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}/3 + \overline{\sigma}_{\mathsf{m}}$, le critère de coalescence peut se réécrire :

$$A_n\,\mathcal{C}_f = \left(\frac{2}{3} + \frac{\overline{\sigma}_{\mathsf{m}}}{\overline{\sigma}_{\mathsf{eq}}}\right) X\,, \tag{3.85}$$

où $A_n = 1 - b^2/L^2 X$ et $X = \sigma_{\mathsf{eq}}/\sigma^y < 1$. Le terme de gauche est purement géométrique et le terme de droite représente le chargement extérieur. L'utilisation d'un modèle de comportement permet d'évaluer l'évolution de la porosité, des facteurs de forme a/b (cavité) et H/L (cellule), ainsi que du facteur X, ce qui a été fait initialement en considérant [THO 85] que X est donné par la loi des mélanges $(1 - f)$, que la porosité reste constante et que le changement de forme est décrit par le modèle de Rice et Tracey. Pour tenir compte de l'évolution de l'endommagement, il est possible [ZHA 95] d'utiliser le modèle de Gurson pour calculer f et X, mais le changement de forme n'est alors pas pris en compte. La même démarche peut être employée en s'appuyant sur le modèle de Gologanu et Leblond qui permet d'inclure la forme de la cavité [BEN 99]. La figure 3.16 présente les déformations de début de coalescence prévues par ce dernier modèle en fonction de la forme initiale de la cavité, pour trois taux de triaxialité des contraintes. Dans tous les cas, la sollicitation principale est selon l'axe des cavités, lesquelles sont initialement distribuées de façon isotrope ($H/L = 1$) ou anisotrope ($H/L = 3$). On retrouve trois effets importants : la ductilité est réduite aux fortes triaxialités, les cavités aplaties (allongées) diminuent (augmentent) la ductilité et celle-ci est accrue (réduite) lorsque les cavités sont centrées dans des cellules allongées (aplaties).

3.2.8. *Nucléation*

La nucléation des cavités est gouvernée par deux mécanismes principaux dont le poids relatif dépend du matériau considéré (section 6.7). La première source de création de cavités tient à la décohésion aux interfaces d'inclusions de seconde phase et le terme de nucléation correspondant est donc piloté par la composante hydrostatique de la contrainte macroscopique. Une seconde source de création de cavités tient à la matrice elle même : des cavités se forment lorsque la déformation dans la matrice atteint une déformation limite. Le terme de nucléation correspondant est donc piloté par la déformation plastique « moyenne » de la matrice.

Chu et Needleman [CHU 80] ont proposé un modèle regroupant les deux sources de nucléation :

$$\dot{f}_{nucl.} = \mathcal{B}\left(\dot{\bar{\sigma}}_{\mathsf{m}} + \dot{\sigma}^M\right) + \mathcal{D}\,\dot{\varepsilon}^M\,, \tag{3.86}$$

où la constante $\mathcal{B}$ traduit l'influence de la contrainte hydrostatique macroscopique et de l'écrouissage de la matrice, tandis que la constante $\mathcal{D}$ traduit celle de la déformation plastique moyenne de la matrice. On remarquera toutefois que, σ^M et ε^M étant liés par la loi d'écrouissage de la matrice, le terme en $\dot{\sigma}^M$ est équivalent à un terme en $\dot{\varepsilon}^M$. Pour tenir compte d'une certaine dispersion des propriétés de la matrice et des interfaces particules-matrice, Chu et

Needleman proposent d'exprimer les constantes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ par des lois gaussiennes normales :

$$\mathcal{B} = \frac{f_N}{s'_N\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^M + \overline{\sigma}_{\mathsf{m}} - \sigma_N}{s'_N}\right)^2\right],$$

$$\mathcal{D} = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^M - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right].$$

Lorsque la nucléation est pilotée par la déformation plastique, la constante $\mathcal{B}$ est nulle, tandis que la constante $\mathcal{D}$ est nulle lorsque la décohésion prédomine.

Remarquons enfin que, lorsque la nucléation est incluse dans l'analyse, le terme $\dot{f}_{nucl.}$ intervient dans l'expression du module d'écrouissage H, car la relation de cohérence fait intervenir $\dot{f}$; il faut donc en tenir compte.

3.2.9. *Mise en œuvre des modèles d'endommagement ductile*

Le critère G.T.N. (3.76) est à l'heure actuelle le modèle le plus souvent employé dans la littérature [TVE 90a] et ses applications sont nombreuses. L'une des premières et des plus spectaculaires est certainement l'analyse de la rupture en tronc de cône [TVE 84]. D'autres applications aux métaux ont suivi : analyse de la rupture d'éprouvettes entaillées [BEC 88], transition fragile-ductile et analyse de l'essai Charpy [TVE 88], extension en dynamique [NEE 91], mais aussi aux composites à matrice métallique [LLO 91] et, plus récemment, aux polymères [STE 97]. Ce modèle et ses extensions utilisent des paramètres dont certains ont été introduits sur une base micromécanique, alors que d'autres sont purement phénoménologiques. Il n'est pas toujours facile de les déterminer, certains étant seulement des paramètres d'ajustement. L'objet de cette fin de chapitre est de donner des exemples de détermination de ces paramètres et d'application des modèles.

3.2.9.1. *Paramètres du modèle G.T.N.*

Dans les cas où l'endommagement est uniquement contrôlé par la croissance des cavités (absence de nucléation), il convient de déterminer la valeur de la porosité initiale f_0. Celle-ci peut varier de 10^{-4} dans les aciers les plus récents à 10^{-1} dans les fontes à graphite sphéroïdal [STE 98] ou les métaux frittés [BEC 88]. Dans les aciers contenant des inclusions (sulfures de manganèse, de calcium, etc.), on considère souvent qu'il y a décohésion immédiate, de sorte que la fraction volumique d'inclusions s'identifie à la porosité initiale.

Quand f_0 est très faible, les difficultés de mesure ont conduit certains auteurs à considérer cette quantité comme un paramètre ajustable du modèle G.T.N.

La croissance de la porosité est contrôlée par deux coefficients, q_1 et q_2, qu'il est possible de déterminer en mesurant les variations de densité des matériaux testés [PAR 98] ou en mesurant un coefficient de Poisson plastique lors d'un essai de traction. Ces méthodes ne sont toutefois applicables que lorsque la porosité est assez élevée. Une autre méthode consiste à étudier la croissance des plus grosses cavités [HEL 99]. En l'absence de mesure, on utilise souvent les valeurs $q_1 = 1{,}5$ et $q_2 = 1$.

La fonction $f^\star$ a été introduite sur une base heuristique afin de reproduire la rupture liée à la coalescence des cavités. La forme en deux segments de droite (3.77) introduit deux nouveaux paramètres : f_c, porosité de début de coalescence, et $\delta = (1/q_1 - f_c)/(f_F - f_c)$, pente de l'accélération. Les valeurs de δ employées dans la littérature sont en général proches de 5 ($f_F \approx 15$ %). Il est aussi tout à fait possible, bien que cela soit rarement fait, d'utiliser une autre forme pour $f^\star$ [MAT 94].

La création de nouvelles cavités est décrite de façon purement phénoménologique. L'équation (3.86) propose une formulation très générale. Le terme en $\dot{\sigma}_{\mathsf{m}}$ doit être traité de façon spécifique lorsque σ_{m} décroît, en particulier lors de la rupture. En pratique, on utilise le plus souvent une nucléation contrôlée par la déformation plastique. La cinétique peut dépendre de ε^M (la loi gaussienne normale pour $\mathcal{D}$ est un cas particulier), mais aussi d'autres variables. On peut supposer que le coefficient $\mathcal{D}$ est une fonction croissante du taux de triaxialité des contraintes, afin de représenter un endommagement plus rapide pour des pressions hydrostatiques élevées [HEL 99].

Lorsque l'on cherche à simuler la propagation de fissures, on observe une forte dépendance des résultats de calcul vis-à-vis de la taille de maille employée [LIU 94]. La figure 3.17 illustre cette dépendance dans le cas d'une éprouvette C.C.P. (*center crack panel*) : l'énergie de rupture est d'autant plus faible que la taille de maille est petite. Ceci est dû à deux effets. D'abord, les champs de déformations et de contraintes sont singuliers en pointe de fissure en petites déformations (voir [RIC 68], par exemple) et l'on obtient encore des valeurs très importantes si l'on tient compte des grandes transformations, ce qui conduit à une mauvaise estimation de l'amorçage. Ensuite, un problème similaire se présente lors de l'utilisation d'indicateurs d'endommagement (paragraphe 3.2.2) : en utilisant une taille de maille fixe, le critère d'amorçage est formulé en termes de valeur critique de l'indicateur à une distance critique. Il est possible d'utiliser des mailles fines et de faire la moyenne des contraintes et déformations dans un voisinage de la pointe de fissure [KIM 98]. Cette solution ne peut être employée avec des modèles couplés et de nombreux auteurs considèrent la taille de maille comme un paramètre ajustable [ROU 87], [XIA 95].

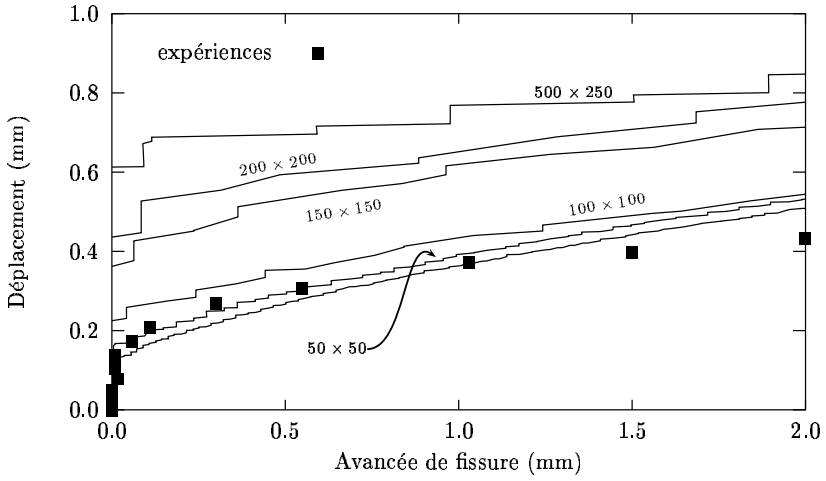


Figure 3.17. *Eprouvettes C.C.P. en Zircaloy-4 hydruré [GRA 98] : avancée de la fissure en fonction du déplacement imposé. Dépendance de la vitesse de propagation en fonction de la taille de maille ($\mu m \times \mu m$) en pointe de fissure*

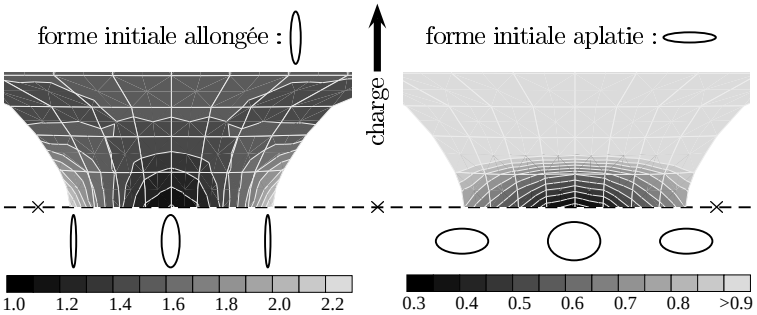


Figure 3.18. *Valeurs de S calculées pour des éprouvettes entaillées comportant des cavités allongées ou aplaties*

Cette solution, bien que numériquement efficace, reste imparfaite car la taille de maille sert à la fois à discrétiser la géométrie et à fixer une longueur caractéristique du matériau. Une autre possibilité consisterait à employer des modèles de comportement non locaux [BAZ 88], [DEB 91], [PEE 96], qui se développent dans le domaine de la rupture ductile [GOL 97b], [MUH 98]. Dans tous les cas, il est important de fixer une longueur caractéristique du matériau.

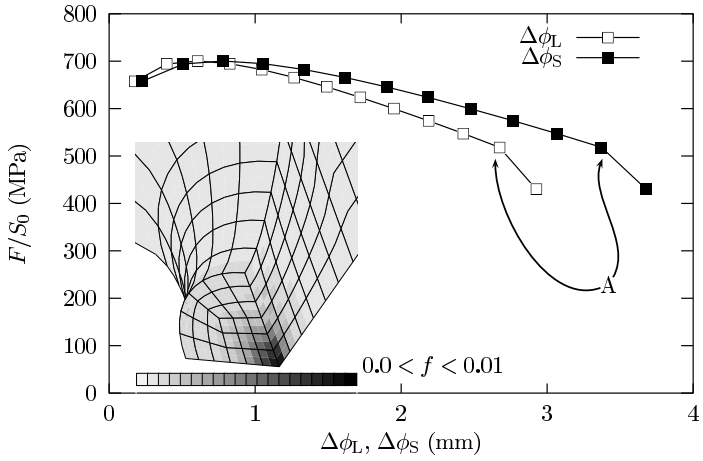


Figure 3.19. *Simulation d'une éprouvette axisymétrique entaillée*

3.2.9.2. *Forme des cavités*

La figure 3.18 illustre l'application du modèle (3.79) dans le cas d'une éprouvette axisymétrique entaillée contenant des cavités allongées ou aplaties. Dans les deux cas, le taux de triaxialité des contraintes dans la plus petite section est maximal au centre de l'éprouvette. Dans le cas des cavités initialement allongées, celles-ci s'arrondissent au centre de l'éprouvette du fait de la triaxialité élevée ; sur le bord, les cavités s'allongent car la triaxialité est faible et la déformation plastique importante. Les cavités initialement aplaties s'arrondissent quelle que soit leur position dans la section de l'éprouvette, avec un effet plus marqué au centre à cause de la triaxialité.

3.2.9.3. *Plasticité anisotrope de la matrice*

Même en conservant un endommagement isotrope et des cavités sphériques, la prise en compte de l'anisotropie plastique dans un calcul de structure peut modifier notablement les taux de triaxialité des contraintes, par exemple en pointe de fissure ou en déformation plane, et donc les cinétiques d'endommagement. La figure 3.19 illustre l'emploi du modèle anisotrope (3.80) dans le cas d'éprouvettes axisymétriques entaillées provenant d'une tôle laminée obéissant au critère de Hill [RIV 98]. Du fait des symétries, un huitième de l'éprouvette est maillée ; celle-ci est sollicitée dans le sens travers de la tôle et la figure représente la force F normalisée par la section initiale S_0 en fonction des variations des diamètres de la section selon les sens long ($\Delta\phi_L$) et travers court

($\Delta\phi_S$). On constate que le sens travers court se déforme plus facilement que le sens long. La carte des valeurs de l'endommagement (porosité f) aux points de Gauss est représentée à l'instant correspondant au début de la rupture de l'éprouvette (points A). Le calcul est réalisé avec le modèle G.T.N. en prenant $f_0 = 1{,}5\ 10^{-4}$, $f_c = 7{,}4\ 10^{-4}$, $\delta = 3{,}8$.

3.2.9.4. *Nucléation*

L'objectif est ici de montrer sur un exemple comment il est possible de déterminer une cinétique de nucléation à partir de l'observation du matériau au lieu de la considérer comme une loi ajustable par comparaison entre expériences et simulations. Le traitement présenté est un cas particulier.

Le matériau est un acier austéno-ferritique dont la ferrite vieillie est fragilisée. Lors de la déformation plastique, celle-ci clive et engendre des microfissures qui viennent s'émousser dans l'austénite (figure 3.20a). En réalisant des essais de traction sur éprouvettes plates, il est possible de dénombrer les fissures par unité de surface N_a en fonction de la déformation plastique. Pour déterminer la taille des fissures, on prédéforme une éprouvette qui est ensuite défragilisée par traitement thermique, puis rompue : les fissures de clivage apparaissant sur le faciès de rupture ont été formées lors de la prédéformation (figure 3.20c). Supposant qu'une fissure est mécaniquement équivalente à une cavité de même surface projetée, la cinétique de nucléation est donnée par :

$$\dot{f}_{nucl.} = \mathcal{D}\,\dot{\varepsilon}^M = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\left\langle s^{\frac{3}{2}} \right\rangle}{\langle D \rangle} \frac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}\varepsilon^M}\,\dot{\varepsilon}^M\,, \tag{3.87}$$

où s est la surface des fissures et D leur projection dans le plan de rupture [JOL 91], [JOL 92a]. Cette cinétique peut être directement utilisée dans le calcul de structure [DEV 97]. Cet exemple illustre l'utilisation d'une mesure quantitative, mais l'observation qualitative des modes d'endommagement peut toutefois fournir une forme raisonnable pour la fonction $\mathcal{D}$ (équation (3.87)), par exemple en indiquant un seuil pour la nucléation [PRA 98].

3.2.9.5. *Hétérogénéités spatiales*

Les cavités ou les sites de nucléation peuvent être répartis de façon hétérogène dans le matériau. C'est par exemple le cas des aciers austéno-ferritiques présentés au paragraphe précédent, pour lesquels on constate que la nucléation se fait en amas dont la taille est d'environ 1 mm (figure 3.20a et b). Dans des aciers plus courants, les inclusions, généralement des sulfures de manganèse, peuvent être réparties sous forme d'amas [DEC 98]. Deux informations

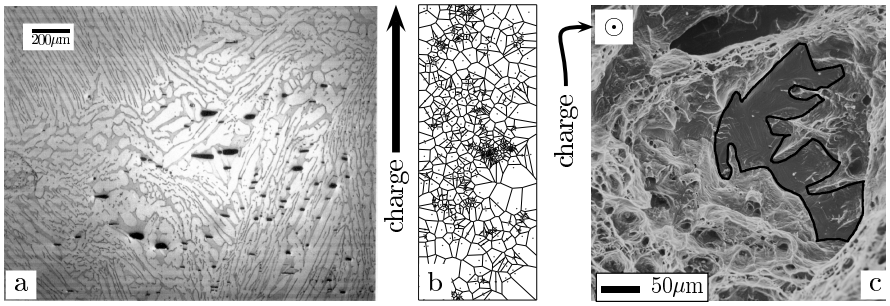


Figure 3.20. *Endommagement des aciers austéno-ferritiques. (a) Fissures de clivage amorcées dans la ferrite fragilisée (en gris foncé) et (b) cellules de Voronoï bâties autour de fissures de clivage (surface observée de 10 × 25 mm² et déformation plastique macroscopique de 4,5 %). (c) Fissures de clivage vues dans le plan perpendiculaire à l'axe du chargement*

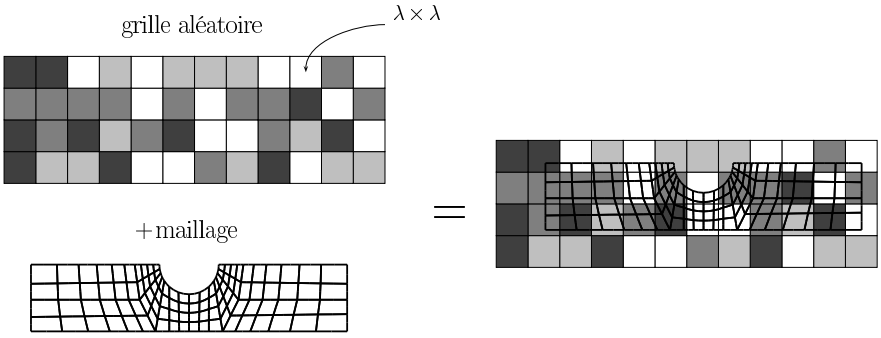


Figure 3.21. *Représentation schématique montrant comment la position de chaque point de Gauss dans la grille permet de lui associer une valeur du paramètre aléatoire*

de nature métallographique sont alors nécessaires pour décrire la distribution spatiale des hétérogénéités : d'une part une distance caractéristique λ donnant la taille du domaine dans lequel la variable aléatoire peut être considérée comme constante, et d'autre part la fonction de distribution de la variable aléatoire, compte tenu du choix de la distance caractéristique. La figure 3.21 montre schématiquement comment ces deux informations peuvent être intégrées à un calcul de structure. On crée une grille de pas λ dans laquelle on tire ensuite au hasard des valeurs de la variable aléatoire. En plaquant sur cette grille un maillage éléments finis, il est alors possible d'associer à chaque point de Gauss une valeur de la variable aléatoire.

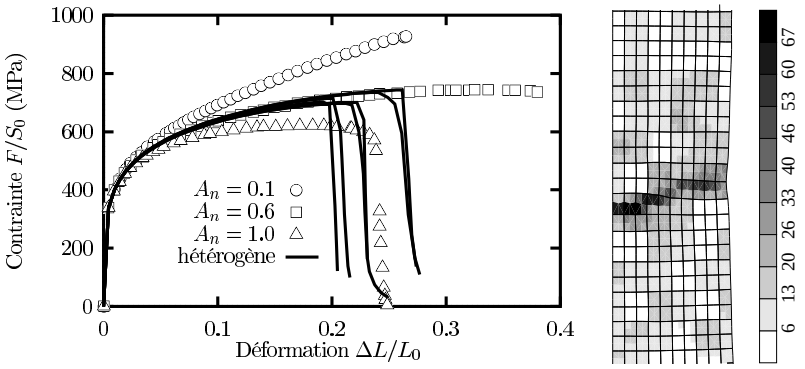


Figure 3.22. *Courbes charge-déplacement simulées pour un essai de traction avec une nucléation homogène ($\mathcal{D} = 0{,}1$, $0{,}6$ et 1) et une nucléation hétérogène (six tirages aléatoires). Carte d'endommagement (f en %) aux points de Gauss dans la zone de striction avant rupture pour une nucléation hétérogène*

Dans le cas des aciers austéno-ferritiques (figure 3.20), la variable aléatoire est le paramètre de nucléation $\mathcal{D}$ (équation (3.87)), qui peut être considéré comme constant sur des plages de $1 \times 1\,\mathrm{mm}^2$. $\mathcal{D}$ varie de 0,1 à 1 avec une valeur moyenne de 0,6 [JOL 92b]. Avec ces valeurs, une éprouvette de traction a été simulée (figure 3.22) soit en utilisant une valeur uniforme pour $\mathcal{D}$, soit en utilisant une répartition aléatoire. Dans le premier cas, la valeur minimale de 0,1 donne une courbe de traction qui surestime les efforts ainsi que la déformation à rupture, la valeur moyenne de 0,6 représente bien les contraintes mais surestime toujours la ductilité, enfin la valeur maximale de 1 sous-estime les efforts mais représente bien la ductilité moyenne. Si l'on utilise une distribution spatiale aléatoire, il convient de réaliser plusieurs tirages ; six simulations avec nucléation hétérogène ont été réalisées (figure 3.22). Elles représentent bien les courbes force-déplacement expérimentales, la ductilité moyenne ainsi que les dispersions expérimentales [DEV 97]. On note en particulier qu'une distribution hétérogène peut amener une ductilité plus faible que la distribution homogène correspondant à la cinétique d'endommagement la plus rapide ($\mathcal{D} = 1$). Remarquons que, dans le cas particulier des aciers austéno-ferritiques pour lesquels un seul mécanisme d'endommagement contrôle la rupture (clivage de la ferrite), il a été possible de bien représenter les données expérimentales, fissuration comprise, sans avoir recours à la fonction $f^\star$ du modèle G.T.N.

Si la longueur caractéristique de la distribution λ est du même ordre de grandeur que la taille des échantillons testés, on observe expérimentalement des dispersions et des effets d'échelle qui peuvent être modélisés en utilisant la même technique. Notons enfin que la même méthodologie a été appliquée à des matériaux où la porosité initiale varie dans l'espace [BEC 87], [DEC 98].

3.3. Bibliographie

[ABO 88] M. ABOUAF, J.L. CHENOT, G. RAISSON AND P. BAUDUIN. « Finite element simulation of hot-isostatic compaction of metal powders ». *Int. J. Numer. Methods Engng*, 25:191–212, 1988.

[AND 86] S. ANDRIEUX, Y. BAMBERGER ET J.J. MARIGO. « Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches ». *J. Méca. Théor. Appl.*, 5:471–513, 1986.

[ARA 99] N. ARAVAS, M. KAILASAM AND P. PONTE CASTAÑEDA. « Constitutive models for porous media with microstructure evolution: computational issues ». In N. ARAVAS AND J.T. KATSIKADELIS, eds, *3rd National Congress on Computational Mechanics*, pages 65–72. Greek Association of Computational Mechanics, 1999.

[BAZ 88] Z.P. BAZANT AND G. PIJAUDIER-CABOT. « Non local continuum damage. localization, instability and convergence ». *J. Appl. Mech.*, 55:287–294, 1988.

[BEC 87] R. BECKER. « Effect of porosity distribution on ductile failure ». *J. Mech. Phys. Solids*, 35:577–599, 1987.

[BEC 88] R. BECKER, A. NEEDLEMAN, O. RICHMOND AND V. TVERGAARD. « Void growth and failure in notched bars ». *J. Mech. Phys. Solids*, 36:317–351, 1988.

[BEN 86] Y. BENVENISTE. « On the Mori-Tanaka method in cracked solids ». *Mech. Res. Comm.*, 13:193–201, 1986.

[BEN 89] Y. BENVENISTE, G.J. DVORAK, J. ZARZOUR AND E.C.J. WUNG. « On interacting cracks and complex crack configurations in linear elastic media ». *Int. J. Solids Structures*, 25:1279–1293, 1989.

[BEN 97] A. BENZERGA, J. BESSON ET A. PINEAU. « Modèle couplé comportement-endommagement ductile de tôles anisotropes ». In B. PESEUX, D. AUBRY, J.P. PELLE ET M. TOURATIER, eds, *Actes du 3ème Colloque national en calcul des structures*, pages 673–678. Presses Académiques de l'Ouest, 1997.

[BEN 99] A. BENZERGA, J. BESSON AND A. PINEAU. « Coalescence–controlled anisotropic ductile fracture ». *J. Engng Mater. Technol.*, 121:221–229, 1999.

[BER 70] C.A. BERG. « Plastic dilation and void interaction ». In M.F. KANINEN, W.F. ADLER, A.R. ROSENFIELD AND R.T. JAFFEE, eds, *Inelastic Behavior of Solids*, pages 171–210. Mc Graw Hill, 1970.

[BON 98] D. BONNENFANT, F. MAZEROLLE AND P. SUQUET. « Compaction of powders containing hard inclusions: experiments and micromechanical modeling ». *Mech. Mater.*, 29:93–109, 1998.

[BOU 96] A. BOURSIN, J.L. CHABOCHE ET F. ROUDOLFF. « Mécanique de l'endommagement avec conditions unilatérales et stockage d'énergie élastique ». *C. R. Acad. Sci. Paris Série IIb*, 323:369–376, 1996.

[BUD 76] B. BUDIANSKY AND R.J. O'CONNELL. « Elastic moduli of a cracked solid ». *Int. J. Solids Structures*, 12:81–97, 1976.

[BUD 82] B. BUDIANSKY, J.W HUTCHINSON AND S. SLUTSKY. « Void growth and collapse in viscous solids ». In H.G. HOPKINS AND M.J. SEWELL, eds, *Mechanics of Solids — The Rodney Hill 60th Anniversary Volume*, pages 13–45. Pergamon Press, 1982.

[BUI 87] H.D. BUI AND C. STOLZ. « Damage theories for brittle and ductile materials ». In K.P. HERRMANN AND L.H. LARSSON, eds, *Fracture of Non-Metallic Materials*, pages 33–46. ECSC, EEC, EAEC, 1987.

[CHA 82] J.L. CHABOCHE. « Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope ». In J.P. BOEHLER, ed, *Comportement mécanique des solides anisotropes — Colloque Euromech 115*, pages 737–760. Editions du CNRS, Paris, 1982.

[CHU 80] C.C. CHU AND A. NEEDLEMAN. « Void nucleation effects in biaxially stretched sheets ». *J. Engng Mater. Technol.*, 102:249–256, 1980.

[CHU 91] A. CHUDNOVSKY AND S. WU. « Elastic interaction of a crack with a random array of microcracks ». *Int. J. Fracture*, 49:123–140, 1991.

[CRE 96] J. CRÉPIN, T. BRETHEAU AND D. CALDEMAISON. « Cavity growth and rupture of β-treated Zirconium: a crystallographic model ». *Acta Metall. Mater.*, 44:4927–4935, 1996.

[DEB 91] R. DE BORST. « Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum ». *Engng Computations*, 8:317–332, 1991.

[DEC 98] K. DECAMP, L. BAUVINEAU, J. BESSON AND A. PINEAU. « Size and geometry effects on ductile rupture of notched bars in a C-Mn steel: Experiments and modelling ». *Int. J. Fracture*, 88:1–18, 1998.

[DEV 95] J. DEVAUX, M. GOLOGANU, J.B. LEBLOND AND G. PERRIN. « On continued void growth in ductile metals subjected to cyclic loadings ». In J.R. WILLIS, ed, *Nonlinear Analysis of Fracture*, pages 299–310. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[DEV 97] L. DEVILLERS-GUERVILLE, J. BESSON AND A. PINEAU. « Notch fracture toughness of a cast duplex stainless steel: modelling of experimental scatter and size effect ». *Nucl. Engng Design*, 168:211–225, 1997.

[DOE 95] E. DOEGE, T. EL-DSOKI AND D. SEIBERT. « Prediction of necking and wrinkling in sheet–metal forming ». *J. Mater. Proc. Technol.*, 50:197–206, 1995.

[FAB 90] V.I. FABRIKANT. « Complete solution to some mixed boundary value problems in elasticity ». *Adv. Appl. Mech.*, 27:153–223, 1990.

[FON 92] C. FOND. Interactions entre fissures et cavites circulaires dans des milieux elastiques plans. Thèse de l'université Paris 6, 1992.

[GAR 96] M. GARAJEU. « Effective behaviour of porous viscoplastic materials containing prolate ellipsoidal cavities ». *C. R. Acad. Sci. Paris Série IIb*, 323:307–314, 1996.

[GAR 97] M. GARAJEU AND P. SUQUET. « Effective properties of porous ideally plastic or viscoplastic materials containing rigid particles ». *J. Mech. Phys. Solids*, 45:873–902, 1997.

[GAR 00] M. GARAJEU, J.C. MICHEL AND P. SUQUET. « A micromechanical approach of damage in viscoplastic materials by evolution in size, shape and distribution of voids ». *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 183:223–246, 2000.

[GOL 93] M. GOLOGANU, J.B. LEBLOND AND J. DEVAUX. « Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids — Case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities ». *J. Mech. Phys. Solids*, 41:1723–1754, 1993.

[GOL 94] M. GOLOGANU, J.B. LEBLOND AND J. DEVAUX. « Approximate models for ductile metals containing non–spherical voids — Case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities ». *J. Engng Mater. Technol.*, 116:290–297, 1994.

[GOL 97a] M. GOLOGANU. Etude de quelques problèmes de rupture ductile des métaux. Thèse de l'université Paris 6, 1997.

[GOL 97b] M. GOLOGANU, J.B. LEBLOND, G. PERRIN AND J. DEVAUX. « Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals ». In P. SUQUET, ed, *Continuum Micromechanics*, CISM Lecture Notes, pages 61–130. Springer, Berlin, 1997.

[GON 89] S.X. GONG AND H. HORII. « General solution to the problem of microcracks near the tip of a main crack ». *J. Mech. Phys. Solids*, 37:27–46, 1989.

[GRA 98] M. GRANGE. Fragilisation du Zircaloy–4 par l'hydrogène. Thèse de l'Ecole des mines de Paris, 1998.

[GUR 77] A.L. GURSON. « Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I — Yield criteria and flow rules for porous ductile media ». *J. Engng Mater. Technol.*, 99:1–15, 1977.

[HAS 63] Z. HASHIN AND S. SHTRIKMAN. « A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials ». *J. Mech. Phys. Solids*, 11:127–140, 1963.

[HAS 88] Z. HASHIN. « The differential scheme and its application to cracked materials ». *J. Mech. Phys. Solids*, 36:719–734, 1988.

[HEL 99] A.L. HELBERT, X. FEAUGAS AND M. CLAVEL. « The influence of internal stresses on fracture toughness in α/β titanium alloys ». *Metall. Mater. Trans.*, 30:2853-2863, 1999.

[HIL 50] R. HILL. *The Mathematical Theory of Plasticity.* Clarendon Press, Oxford, 1950.

[HOE 79] A. HOENIG. « Elastic moduli of a non-randomly cracked body ». *Int. J. Solids Structures*, 15:137–154, 1979.

[HOR 83] H. HORII AND S. NEMAT-NASSER. « Overall moduli of solids with microcracks ». *J. Mech. Phys. Solids*, 31:155–171, 1983.

[HUA 91] Y. HUANG. « Accurate dilatation rates for spherical voids in triaxial stress fields ». *J. Appl. Mech.*, 58:1084–1086, 1991.

[JOL 91] P. JOLY AND A. PINEAU. « Local versus global approaches to elastic-plastic fracture mechanics. Application to ferritic steels and a cast duplex stainless steel ». In *Defect Assessment in Components — Fundamentals and Applications*, pages 381–414. Mechanical Engineering Publications, London, 1991.

[JOL 92a] P. JOLY. Etude de la rupture d'aciers inoxydables austéno–ferritiques moulés, fragilisés par vieillissement à 400°C. Thèse de l'Ecole des mines de Paris, 1992.

[JOL 92b] P. JOLY, Y. MEYZAUD AND A. PINEAU. « Micromechanisms of fracture of an aged duplex stainless steel containing a brittle and a ductile phase: development of a local criterion of fracture ». In J. GIOVANOLA, ed, *Advances in Fracture/Damage Models for the Analysis of Engineering Problems*, pages 151–180. ASME, 1992.

[JU 92] J.W. JU AND K.H. TSENG. « A three-dimensional statistical micromechanical theory for brittle solids with interacting microcracks ». *Int. J. Damage Mech.*, 1:102–131, 1992.

[KAC 94] M. KACHANOV. « Elastic solids with many cracks and related problems ». *Adv. Appl. Mech.*, 30:259–445, 1994.

[KAI 97a] M. KAILASAM, P. PONTE CASTAÑEDA AND J.R. WILLIS. « The effect of particle size, shape, distribution and their evolution on the constitutive response of nonlinearly viscous composites. I — Theory ». *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 355:1835–1852, 1997.

[KAI 97b] M. KAILASAM, P. PONTE CASTAÑEDA AND J.R WILLIS. « The effect of particle size, shape, distribution and their evolution on the constitutive response of nonlinearly viscous composites. II — Examples ». *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 355:1853–1872, 1997.

[KAN 80] S. KANAUN. « Poisson´s field of cracks in elastic medium ». *J. Appl. Math. Mech.*, 44:808–815, 1980.

[KAN 83] S. KANAUN. « Elastic medium with random field of inhomogeneities ». In I.A. KUNIN, ed, *Elastic Media with Microstructure*, 2:165–228. Springer, Berlin, 1983.

[KIM 98] A.S. KIM, J. BESSON AND A. PINEAU. « Global and local approaches to fracture normal to interfaces ». *Int. J. Solids Structures*, 36:1845–1864, 1998.

[KOP 88] J. KOPLIK AND A. NEEDLEMAN. « Void growth and coalescence in porous plastic solids ». *Int. J. Solids Structures*, 24:835–853, 1988.

[LEB 94] J.B. LEBLOND, G. PERRIN AND P. SUQUET. « Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids ». *Int. J. Plasticity*, 10:213–235, 1994.

[LEB 95] J.B. LEBLOND, G. PERRIN AND J. DEVAUX. « An improved Gurson-type model for hardenable ductile metals ». *Eur. J. Mech. A/Solids*, 14:499–527, 1995.

[LIU 94] Y. LIU, S. MURAKAMI AND Y. KANAGAWA. « Mesh–dependence and stress singularity in finite element analysis of creep crack growth by continuum damage mechanics approach ». *Eur. J. Mech. A/Solids*, 13:395–417, 1994.

[LLO 91] J. LLORCA, A. NEEDLEMAN AND S. SURESH. « An analysis of the effects of matrix void growth on deformation and ductility in metal-ceramic composites ». *Acta Metall. Mater.*, 39:2317–2335, 1991.

[MAR 85] B. MARINI, F. MUDRY AND A. PINEAU. « Experimental study of cavity growth in ductile rupture ». *Engng Fracture Mech.*, 22:989–996, 1985.

[MAT 94] K.K. MATHUR, A. NEEDLEMAN AND V. TVERGAARD. « Ductile failure analyses on massively parallel computers ». *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 119:283–309, 1994.

[MAU 94] C. MAUGE AND M. KACHANOV. « Effective elastic properties of an anisotropic material with arbitrarily oriented interacting cracks ». *J. Mech. Phys. Solids*, 42:561–584, 1994.

[MCC 68] F. M. MCCLINTOCK. « A criterion for ductile fracture by the growth of holes ». *J. Appl. Mech.*, 35:363–371, 1968.

[MEA 85] M. MEAR AND J.W. HUTCHINSON. « Influence of yield surface curvature on flow localization in dilatant plasticity ». *Mech. Mater.*, 4:395–407, 1985.

[MIC 92] J.C. MICHEL AND P. SUQUET. « The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials ». *J. Mech. Phys. Solids*, 40:783–812, 1992.

[MOR 73] T. MORI AND K. TANAKA. « Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions ». *Acta Metall. Mater.*, 21:597–629, 1973.

[MUH 98] U. MÜHLICH AND R. KIENZLER. « Nonlocal modification of the Gurson–model ». In A. BERTRAM AND F. SIDOROFF, eds, *Euromech-Mecamat'97, Mechanics of Materials with Intrinsic Length Scale: Physics, Experiments, Modelling and Applications*, pages 277–284, 1998.

[NEE 91] A. NEEDLEMAN AND V. TVERGAARD. « An analysis of dynamic, ductile crack growth in a double edge cracked specimen ». *Int. J. Fracture*, 49:41–67, 1991.

[OCO 76] R.J. O'CONNELL AND B. BUDIANSKY. « Seismic velocities in dry and saturated cracked solids ». *J. Geophys. Res.*, 79:5412–5426, 1976.

[PAR 98] T. PARDOEN, I. DOGHRI AND F. DELANNAY. « Experimental and numerical comparison of void growth models and void coalescence criteria for the prediction of ductile fracture in copper bars ». *Acta Mater.*, 46:541–522, 1998.

[PEE 96] R.H.J. PEERLINGS, R. DE BORST, W.A.M. BREKELMANS, J.H.P. DE VREE AND I. SPEE. « Some observations on localisation in non-local and gradient damage models ». *Eur. J. Mech. A/Solids*, 15, 1996.

[PER 90] G. PERRIN AND J.B. LEBLOND. « Analytical study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension. Application to some problems in ductile fracture of metals ». *Int. J. Plasticity*, 6:677–699, 1990.

[PER 92] G. PERRIN. Contribution à l'étude théorique et numérique de la rupture ductile des métaux. Thèse de l'Ecole polytechnique, Palaiseau, 1992.

[PON 91] P. PONTE CASTAÑEDA. « The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites ». *J. Mech. Phys. Solids*, 39:45–71, 1991.

[PON 95] P. PONTE CASTAÑEDA AND J.R. WILLIS. « The effect of spatial distribution on the effective behaviour of composite materials and cracked media ». *J. Mech. Phys. Solids*, 43:1919–1951, 1995.

[PRA 98] F. PRAT, M. GRANGE, J. BESSON AND E. ANDRIEU. « Behavior and rupture of hydrided Zircaloy–4 tubes and sheets ». *Metall. Trans. A*, 29:1643–1651, 1998.

[REN 96] V. RENAUD, D. KONDO AND J.P. HENRY. « Computations of effective moduli for microcracked materials: a boundary element approach ». *Comp. Mater. Sci.*, 5:227–237, 1996.

[RIC 68] J.R. RICE AND G.F. ROSENGREN. « Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material ». *J. Mech. Phys. Solids*, 16:1–12, 1968.

[RIC 69] J.R. RICE AND D.M. TRACEY. « On the ductile enlargment of voids in triaxial stress fields ». *J. Mech. Phys. Solids*, 17:201–217, 1969.

[RIC 94] A.B. RICHELSEN AND V. TVERGAARD. « Dilatant plasticity or upper bounds estimates for porous ductile solids ». *Acta Metall. Mater.*, 42:2561–2577, 1994.

[RIV 98] F. RIVALIN. Developpement d'aciers pour gazoducs à haute limite d'élasticité et ténacité élevée : mécanique et mécanismes de la rupture ductile à grande vitesse. Thèse de l'Ecole des mines de Paris, 1998.

[ROU 87] G. ROUSSELIER. « Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture ». *Nucl. Engng Design*, 105:97–111, 1987.

[SHI 76] S. SHIMA AND M. OYANE. « Plasticity theory for porous metals ». *Int. J. Mech. Sci.*, 18:285–291, 1976.

[SOF 92] P. SOFRONIS AND R.M. MCMEEKING. « Creep of power-law material containing spherical voids ». *J. Appl. Mech.*, 59:S88–S95, 1992.

[STE 97] A.C. STEENBRINK AND E. VAN DER GIESSEN. « Void growth in glassy polymers ». *J. Mech. Phys. Solids*, 45:405–437, 1997.

[STE 98] D. STEGLICH AND W. BROCKS. « Micromechanical modelling of damage and fracture of ductile materials ». *Fatigue Fracture Engng Mater. Structures*, 21:1175–1188, 1998.

[SUQ 92] P. SUQUET. « On bounds for the overall potential of power law materials containing voids with arbitrary shape ». *Mech. Res. Comm.*, 19:51–58, 1992.

[THO 68] P.F. THOMASON. « A theory for ductile fracture by internal necking of cavities ». *J. Inst. Metals*, 96:360, 1968.

[THO 85] P.F. THOMASON. « Three-dimensional models for the plastic limit-loads at incipient failure of the intervoid matrix in ductile porous solids ». *Acta Metall. Mater.*, 33:1079–1085, 1985.

[TVE 81] V. TVERGAARD. « Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions ». *Int. J. Fracture*, 17:389–407, 1981.

[TVE 84] V. TVERGAARD AND A. NEEDLEMAN. « Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar ». *Acta Metall. Mater.*, 32:157–169, 1984.

[TVE 88] V. TVERGAARD AND A. NEEDLEMAN. « An analysis of the temperature and rate dependence of Charpy V-notch energies for a high nitrogen steel ». *Int. J. Fracture*, 37:197–215, 1988.

[TVE 90a] V. TVERGAARD. « Analysis of tensile properties for a whisker-reinforced metal-matrix composite ». *Acta Metall. Mater.*, 38:185–194, 1990.

[TVE 90b] V. TVERGAARD. « Material failure by void growth to coalescence ». *Adv. Appl. Mech.*, 27:83–151, 1990.

[VAK 71] A.A. VAKULENKO AND M.L. KACHANOV. « Continuum theory of medium with cracks ». *Mech. Solids*, 6:145–151, 1971.

[WIL 77] J. WILLIS. « Bounds and self-consistent estimates for the overall moduli of anisotropic composites ». *J. Mech. Phys. Solids*, 25:185–202, 1977.

[XIA 95] L. XIA, C.F. SHIH AND J.W. HUTCHINSON. « A computational approach to ductile crack growth under large scale yielding conditions ». *J. Mech. Phys. Solids*, 43:389–413, 1995.

[ZHA 95] Z.L. ZHANG AND E. NIEMI. « A new failure criterion for the Gurson–Tvergaard dilational constitutive model ». *Int. J. Fracture*, 70:321–334, 1995.