

Physique des sons et vibrations

Philippe Herzog

Mail : herzog@lma.cnrs-mrs.fr - Tel : 04 91 16 40 89

Adnane Boukamel

Mail : adnane.boukamel@ec-marseille.fr - Tel : 04 91 05 43 90

Polycopié de Jean-Pierre Lefebvre



Physique des sons et vibrations

- C1 : Propagation : principe et applications
- C2 : Ondes sonores en fluide non dissipatif
- C3 : Ondes élastiques dans les solides
- C4 : Dissipation dans les solides
- C5 : Sources et dissipation acoustiques
- C6 : Interface solide/fluide, couche limite

Quel élément de volume ?

- Choix des coordonnées
- Forme locale : $(n, V) \rightarrow \rho$ à n constant
- Conservation de la quantité de matière

Inertie de cet élément

- Bilan des forces (écart externe - interne)
- Forme locale : contrainte, déformation/déplacement
- Conservation de la quantité de mouvement

Comportement de cet élément

- Etat du milieu (nature et dépendance / T)
- Phénomènes de transport éventuels
- Conservation de l'énergie (y.c. chaleur)

Particularités

- Faible densité (mobilité intermoléculaire)
- Pas de forme propre (faible cohésion)
- Agitation thermique dominante

Caractérisation

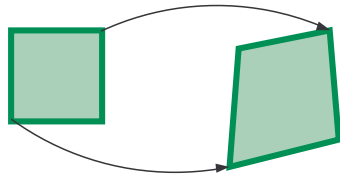
- Pas d'essais "mécaniques" !
- Calorimétrie (relations entre P, V, T, γ, \dots)
- Propriétés dynamiques (estimation c_0, \dots)

Homogène et isotrope

- Propriétés locales statistiques, sans orientation
- Variations spatiales de caractéristiques

Cas particulier dans les équations de la MMC

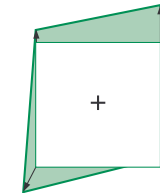
Champ de déplacement



Mouvement d'ensemble



Déformation



Champ de déplacement $\vec{u} = \vec{x} - \vec{a}$ (\vec{a} = position à t_0)

Mouvement relatif au CdG : variation des dimensions de dV

En développant $dx'_i = dx_i + du_i$: $dl'^2 = dl^2 + 2\epsilon_{ik}dx_idx_k$

Tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$ (sans dimension) :

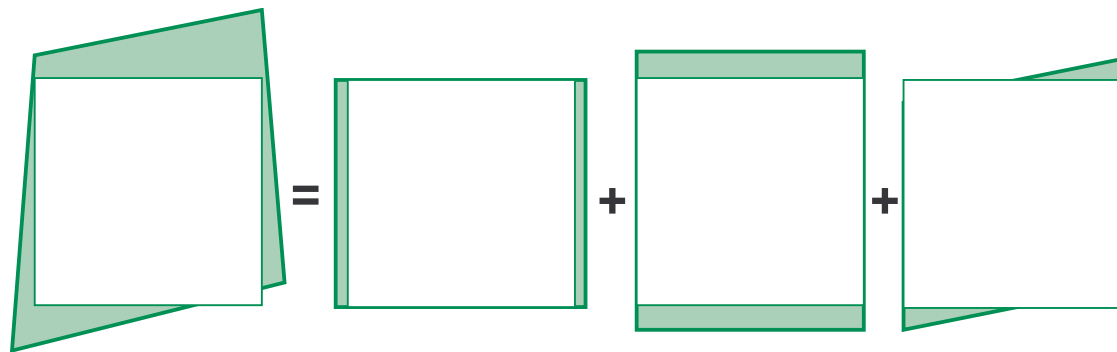
$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)$$

Expression quadratique - symétrique par construction

Tenseur de Green : linéarisation de $\bar{\bar{\epsilon}}$ (termes quadratiques négligés) :

$$\epsilon_{ik} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad \text{soit} \quad \bar{\bar{\epsilon}} \approx \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} + {}^T \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}})$$

Déformations longitudinales (dilatations) + transversales (glissements)



Pas de "forme" \Rightarrow pas de "déformation" !

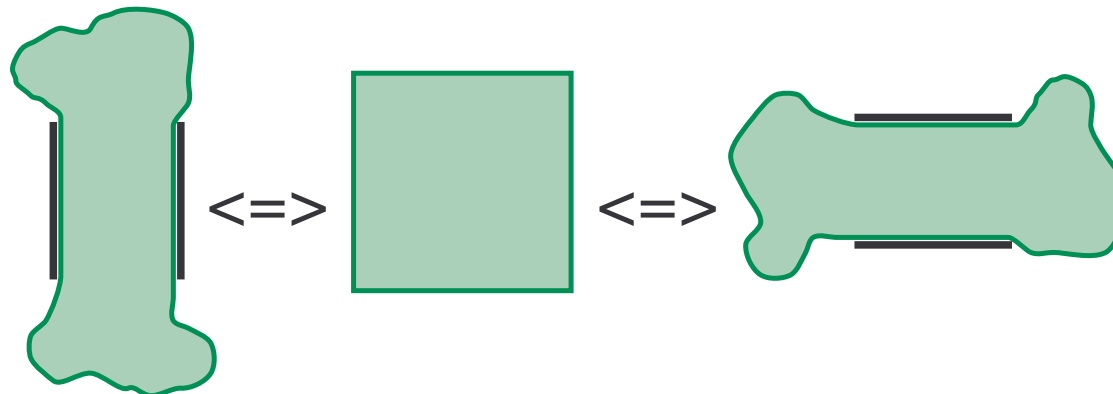
Energie interne variant exclusivement avec le volume

Pas d'effort associé à un changement de forme à $V = C^{te}$

Variation globale de volume $\Leftrightarrow \text{tr } \bar{\bar{\epsilon}}$:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\epsilon}}^S + \bar{\bar{\epsilon}}^D \quad \text{avec} \quad \bar{\bar{\epsilon}}^S = \frac{1}{3}(\text{tr } \bar{\bar{\epsilon}})\bar{\bar{\mathbf{I}}}, \quad \text{tr } \bar{\bar{\epsilon}}^D = 0 \quad \text{et} \quad d\rho = -\rho d(\text{tr } \bar{\bar{\epsilon}}^S)$$

Déformation acoustique \approx variable scalaire $\langle \epsilon_{ii} \rangle_i$



Effort sur chaque face j : $\vec{F}_j = \sum_i F_{ij} \vec{e}_i \Leftrightarrow$ contrainte $\sigma_{ij} = \frac{F_{ij}}{S_j}$ [Pa]

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Tenseur des contraintes : $\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma^L}} + \overline{\overline{\tau}}$

Traction/compression (longitudinale) : $\overline{\overline{\sigma^L}} = (\sigma_{ii})$

Cisaillement : $\overline{\overline{\tau}} = (\tau_{ij})$ avec $i \neq j$ donc $\text{tr } \overline{\overline{\tau}} = 0$

Equilibre des moments $\Rightarrow \tau_{ij} = \tau_{ji}$, donc $\overline{\overline{\sigma}}$ est symétrique

Alors $\overline{\overline{\epsilon}}$ et $\overline{\overline{\sigma}}$ sont symétriques : remplacement de ij par α ou β :

$$\begin{array}{lll} 11 \rightarrow 1 & 22 \rightarrow 2 & 33 \rightarrow 3 \\ 32 \text{ et } 23 \rightarrow 4 & 31 \text{ et } 13 \rightarrow 5 & 21 \text{ et } 12 \rightarrow 6 \end{array}$$

Ainsi $\overline{\overline{(\sigma_{ij})}} \equiv \overline{(\sigma_{\alpha})}$ et $\overline{\overline{(\epsilon_{kl})}} \equiv \overline{(\epsilon_{\beta})}$: ordre 1 à 6 composantes

Paires de termes symétriques prises en compte dans $\overline{(\epsilon_{\beta})}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\beta} &= \epsilon_{kk} & \text{pour } \beta = 1, 2, 3 \\ &= 2\epsilon_{kl} & \text{pour } \beta = 4, 5, 6 \end{aligned}$$

Relations tensorielles ramenées à des relations vectorielles

Pas (ou très peu) de cohésion \Rightarrow compression dominante

Pas d'effort associé à un changement de forme à $V = C^{te}$

Energie interne proportionnelle à la pression "isostatique"

Résultante statistique isotrope $\Leftrightarrow \text{tr } \bar{\bar{\sigma}}$:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}^S + \bar{\bar{\sigma}}^D \quad \text{avec} \quad \bar{\bar{\sigma}}^S = \frac{1}{3}(\text{tr } \bar{\bar{\sigma}})\bar{\bar{\mathbf{I}}}, \quad \text{tr } \bar{\bar{\sigma}}^D = 0 \quad \text{et} \quad P = -\frac{1}{3}(\text{tr } \bar{\bar{\sigma}}^S)$$

Ainsi pour un fluide quelconque : $\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}^D - P\bar{\bar{\mathbf{I}}}$

Pression acoustique \approx contrainte scalaire $\langle \sigma_{ii} \rangle_i$

Essais mécaniques \Rightarrow coefficients élastiques (petites déformations)

Tenseur des rigidités $C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}}$ d'où $\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\overline{\overline{C_{ijkl}}}}} \overline{\overline{\epsilon}}$

Symétrie de $\overline{\overline{\epsilon}}$ et $\overline{\overline{\sigma}}$ \Rightarrow relation vectorielle $\overline{(\sigma_\alpha)} = \overline{\overline{\overline{C_{\alpha\beta}}}} \overline{(\epsilon_\beta)}$

Transformation réversible \Rightarrow symétrie de $\overline{\overline{\overline{C_{\alpha\beta}}}}$ [6x6]

$\Rightarrow \overline{\overline{\overline{C_{\alpha\beta}}}}$ défini par 21 coefficients élastiques indépendants

A priori, ces coefficients expriment une élasticité anisotrope (cohésion cristalline)

Propriétés macroscopiques invariantes via les symétries microscopiques

Milieu	Propriétés	Nb coef.	Coefs.
Cristal	quelconque	21	n/c
orthotrope	axes propres \perp	9	E_{ii}, G_{ij}, ν_{ij}
cubique	+ axes similaires	3	E, G, ν
isotrope	"sphérique"	2	E, ν

Solide homogène et isotrope : $d\bar{\sigma} = \lambda \text{tr}(d\bar{\epsilon}) + 2\mu d\bar{\epsilon}$

$\{\lambda, \mu\}$: coefficients de Lamé [Pa]

$E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$: module d'élasticité [Pa]

$\nu = \lambda/(2(\lambda + \mu))$: coefficient de Poisson [1]

$G = E/(2(1 + \nu)) = \mu$: module de cisaillement [Pa]

Milieu fluide (isotrope)

$$\bar{\bar{\sigma}}^S = -P \bar{\bar{\mathbf{I}}}$$

$$\bar{\bar{\epsilon}}^S = \frac{1}{3}(\text{tr} \bar{\bar{\epsilon}}) \bar{\bar{\mathbf{I}}}$$

$$dv = -v d(\text{tr} \bar{\bar{\epsilon}}^S) \text{ où } v = 1/\rho$$

Milieu sans cohésion de cisaillement

$$\lambda = 0 \text{ donc } E = 2\mu \text{ et } G = \mu$$

$$\text{ainsi } \bar{\bar{\sigma}}^S = 2\mu \bar{\bar{\epsilon}}^S$$

$$\text{donc } -dP = \frac{2\mu}{3} \frac{dv}{v}$$

Unique coefficient élastique :

$$\chi = \frac{-1}{v} \frac{\partial v}{\partial P} \text{ soit } \chi = 3/E \text{ et } \lambda = 0$$

Propriétés thermodynamiques :

- Multiples variables thermodynamiques non indépendantes (P, V, T, n, \dots)
- Choix de variables indépendantes (ex : $s, \bar{\epsilon}$)
- Modèle thermodynamique \Rightarrow propriétés du milieu
- Expression (E1) = relation d'élasticité

Relations différentielles :

- Choix (judicieux) d'une fonction d'état (U, H, S, \dots)
- Fonction d'état = différentielle exacte
- Dérivées partielles \Leftrightarrow paramètres du milieu (ex : élasticité)
- Expression (E2) fonction des variables indépendantes

Elimination (E1) vs (E2) : "équation d'état" \Rightarrow formes différentielles

Energie interne massique = $f(s, \bar{\epsilon})$

$$de = T ds + (\bar{\sigma}/\rho) : d\bar{\epsilon}$$

Décomposition des tenseurs pour un fluide

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^D - P \bar{\mathbf{I}}$$

$$d\bar{\epsilon} = d\bar{\epsilon}^D + \frac{\rho}{3} \bar{\mathbf{I}} dv \quad \text{où } v = 1/\rho$$

$$\text{Soit } de = T ds - P dv + (\bar{\sigma}^D / \rho) : d\bar{\epsilon}^D$$

Mais pas d'énergie interne associée au cisaillement !

Equation "de Gibbs" : $de = T ds - P dv$

Bilan de la masse, l'impulsion et l'énergie

Réalisé sur n'importe quel dV

Dérivée particulaire : $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla} \varphi$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\mathbf{v}}) = 0 \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}] \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}} = \vec{\mathbf{F}} \quad [N.m^{-3}] \\ \partial_t [\rho (e + \frac{\mathbf{v}^2}{2})] + \vec{\nabla} \cdot [\rho (e + \frac{\mathbf{v}^2}{2}) \vec{\mathbf{v}} - \vec{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{q}}] = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + r \quad [W.m^{-3}] \end{array} \right.$$

Ecriture plus compacte

Dérivée particulaire : $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla} \varphi$

Elimination de $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}$: (1) + (2) \rightarrow (2')

Elimination de $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{F}}$: (1) + (2) + (3) \rightarrow (3')

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0 \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}] \\ \rho \dot{\vec{\mathbf{v}}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\overline{\sigma}} = \vec{\mathbf{F}} \quad [N.m^{-3}] \\ \rho \dot{e} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{q}} - (\vec{\overline{\sigma}} : \dot{\vec{\epsilon}}) = r \quad [W.m^{-3}] \end{array} \right.$$

Bilan d'énergie faisant apparaître le comportement élastique

Bilan d'énergie + équation d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \dot{e} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{q}} = (\bar{\bar{\sigma}} : \dot{\bar{\bar{\epsilon}}}) + r \quad [W.m^{-3}] \\ de = T ds - P dv \quad [J.kg^{-1}] \end{array} \right.$$

$$T \rho \dot{s} = (\bar{\bar{\tau}} : \dot{\bar{\bar{\epsilon}}}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{q}} + r$$

avec $\bar{\bar{\tau}} = \bar{\bar{\sigma}} + P \bar{\bar{\mathbf{I}}}$ tenseur des contraintes visqueuses

Fluide non visqueux, sans sources de chaleur \Rightarrow isentropique

Isentropique : $\dot{s} = 0$ et $\overline{\sigma} = -P\overline{\mathbf{I}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho} + \rho \overline{\nabla} \cdot \overline{\mathbf{v}} = 0 \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}] \\ \rho \dot{\overline{\mathbf{v}}} - \overline{\nabla} P = \overline{\mathbf{F}} \quad [N.m^{-3}] \end{array} \right.$$

Fluide "quasi-idéal" (identification expérimentale)

Trois variables P , $\overline{\mathbf{v}}$ et ρ non indépendantes

Equation d'état reliant p et $\rho \Rightarrow$ bivariant

Ni dissipation, ni génération : "loin des sources"

Variations autour d'un point "de repos" (quasi-statique)

Pression $P = P_0 + p$

Vitesse $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' = \vec{v}'$ (car $\vec{v}_0 = \vec{0}$)

Masse volumique $\rho = \rho_0 + \rho'$

Température $T = T_0 + T'$

Pas de sources (proches)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0 \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}] \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0 \quad [N.m^{-3}] \\ \rho' - \rho_0 \chi_s p = 0 \quad [kg.m^{-3}] \end{array} \right.$$

Elimination de ρ et \vec{v}' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho' - \rho_0 \chi_s p = 0 \quad [kg.m^{-3}] \\ \chi_s \partial_t p + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0 \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}] \\ \rho_0 \partial_t \vec{v}' + \vec{\nabla} p = 0 \quad [N.m^{-3}] \end{array} \right.$$

Equation d'onde (pour tout fluide non dissipatif)

$$\rho_0 \chi_s \partial_{tt} p - \Delta p = 0 \quad [kg.m^{-3}.s^{-2}] \quad (1)$$

Forme identique à celle établie pour un "gaz idéal" (ρ_0 et χ_s empiriques)

Variations simultanées de ρ , \vec{v}' et T' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho' = \rho_0 \chi_s p \quad [kg.m^{-3}] \\ \vec{v}' = (1/\rho_0) \int \vec{\nabla} p dt \quad [m.s^{-1}] \\ T' = (\chi_s/\alpha_s) p \quad [K] \end{array} \right.$$

Variables difficilement mesurables

ρ' non accessible directement

\vec{v}' trop faible et rapide

T' infinitésimale et rapide

⇒ source d'erreurs historiques ...

Vitesse acoustique décomposée en $\vec{v}' = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\Psi}$

Décomposition très générale, introduite dans les EDP

Variables acoustiques fonctions des potentiels :

$$\begin{cases} p & = & -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \rho' & = & -\frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ T' & = & -\frac{\alpha_s}{(\gamma-1)C_p} T_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{cases}$$

avec $(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \partial_{tt}^2) \Phi = 0$

$\vec{v}' = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$: vitesse acoustique irrotationnelle

Description plus simple que les solides

Relation d'élasticité "minimale" (scalaire)

Equation d'état très simple (isentropique)

Fonction d'une seule variable scalaire

Champ résultant souvent complexe

Pas d'alignement de l'effet sur la cause

Importantes fluctuations spatiales

Difficile à "confiner" (fuites, ...)

Couplage avec de nombreux phénomènes

Faibles énergies (sources parasites)

Echelles largement réparties (coïncidences)

Intimement lié aux propriétés du milieu

Généralisation de la propagation 1D

Direction de propagation \vec{n}_0

Invariant selon les plans $\perp \vec{n}_0$

Impédance "itérative" : $p \vec{n}_0 = \rho_0 c_0 \vec{v}'$

Vecteur d'onde : $\vec{k} = (\omega/c_0) \vec{n}_0$

$$p(\vec{M}) = p_a e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{M})}$$

Solution particulière importante

Cas limite de propagation (champ "lointain")

Approximation locale "hautes fréquences" (rayons)

Elément d'une base (transformée de Fourier spatiale)

Solution centrée en $\vec{\mathbf{M}}_0$

Propagation isotrope ("monopôle")

Ne dépendant que de $\vec{\mathbf{R}} = |\vec{\mathbf{M}} - \vec{\mathbf{M}}_0|$

Deux solutions : divergente ou convergente

$$p(\vec{\mathbf{M}}) = p_a \frac{e^{j(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot |\vec{\mathbf{R}}|)}}{4\pi |\vec{\mathbf{R}}|}$$

Solution particulière importante

Solution unitaire en espace infini ("noyau de Green")

Premier élément d'une base ("harmoniques sphériques")

Onde "localement" plane si $|\vec{\mathbf{R}}| \rightarrow \infty$ (champ "lointain")

Linéarisation autour d'une vitesse imposée

$$\text{Pression } P = P_0 + p$$

$$\text{Vitesse } \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\text{Masse volumique } \rho = \rho_0 + \rho'$$

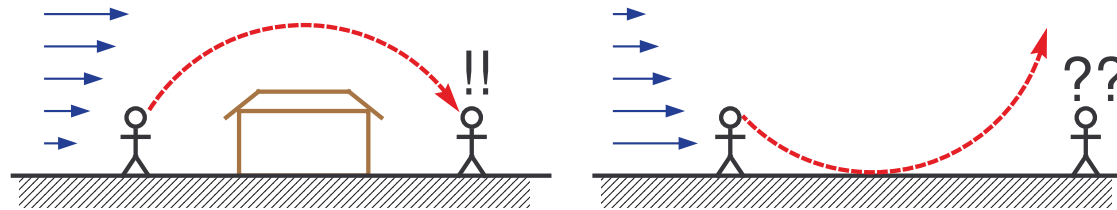
$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \rho' \right) + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0 \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}] \\ \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{v}' \right) + \vec{\nabla} p = 0 \quad [N.m^{-3}] \end{array} \right.$$

Forme générale des équations inchangée

- Opérateur ∂_t modifié en $d_t = (\partial_t + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})$
- Changement de coordonnées $\vec{M} \rightarrow (\vec{M} + \vec{v}_0 t)$

Réfraction

- Onde plane : célérité locale $c(\vec{M}) = c_0 + (\vec{v} \cdot \vec{n}_0(\vec{M}))$
- Courbure des "trajectoires" (acoustique géométrique) :



Mouvements plus complexes :

- Effet Doppler : modulation d'amplitude et de fréquence
- Décorrélation de signaux, génération de bruit

⇒ linéarisation insuffisante (couplage aéroacoustique)

Linéarisation autour d'un champ "au repos"

Pression $P = P_0 + p$ (avec P_0 uniforme)

Vitesse $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' = \vec{v}'$ (car $\vec{v}_0 = \vec{0}$)

Masse volumique $\rho = \rho_0(\vec{M}) + \rho'$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \rho_0(\vec{M}) + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0 \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}] \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0 \quad [N.m^{-3}] \end{array} \right.$$

Equation de propagation modifiée

- Propagation non isentropique

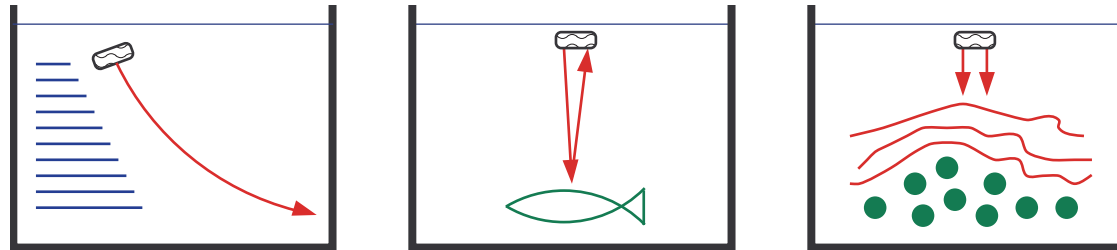
$$- \rho_0 \chi_s \partial_{tt} p - \Delta p + \frac{\vec{\nabla} \rho_0(\vec{M})}{\rho_0(\vec{M})} \cdot \vec{\nabla} p = 0$$

Milieu "lentement variable" : réfraction

Variation négligeable à l'échelle de λ

\approx Propagation avec célérité variable

Rétrodiffusion si variations plus brusques



Milieu "faiblement variable" : diffraction

Variation locales d'impédance caractéristique

\approx Répartition de sources (écarts/ Z_0)

Echos ou diffusion selon taille des "cibles"

Questions ?