

# Physique des sons et vibrations

*Philippe Herzog*

*Mail : herzog@lma.cnrs-mrs.fr - Tel : 04 91 16 40 89*

*Adnane Boukamel*

*Mail : adnane.boukamel@ec-marseille.fr - Tel : 04 91 05 43 90*

*Complément / polycopié de Jean-Pierre Lefebvre*



## Physique des sons et vibrations

- C1 : Propagation : principe et applications
- C2 : Ondes sonores en fluide non dissipatif
- C3 : Ondes élastiques dans les solides
- C4 : Dissipation dans les solides
- C5 : **Sources et dissipation acoustiques**
- C6 : Interface solide/fluide, couche limite

Source = "influence extérieure" sur les phénomènes acoustiques

Traduction d'un couplage avec un autre phénomène (explicite ou non)

Modification des équations de conservation (ajout 2<sup>nd</sup> membre)

Influence "locale" : propagation usuelle "loin des sources"

Trois phénomènes  $\Rightarrow$  trois types de sources

Source de débit : injection de matière

Source de force : contrainte au sein du fluide

Source de chaleur : dilatation thermique

Bilan de la quantité de matière :

$$\dot{\rho} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}} = (Q_0 + q_m) \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}]$$

linéarisé, d'où :

$$\partial_t \rho + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}} = q_m \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}]$$

$q_m$  = source de débit par unité de volume

Bilan de l'impulsion :

$$\rho \dot{\vec{v}} - \nabla \cdot \vec{\sigma} = (\vec{F}_0 + \vec{F}) \quad [N.m^{-3}]$$

linéarisé, d'où :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \nabla p = \vec{F} \quad [N.m^{-3}]$$

$\vec{F}$  = source de force par unité de volume

## Bilan d'énergie + équation d'état

$$T\rho\dot{s} = (\overline{\overline{\tau}} : \dot{\overline{\overline{\epsilon}}}) - \overline{\nabla} \cdot \overline{\mathbf{q}} + r \quad [W.m^{-3}]$$

Ni viscosité  $(\overline{\overline{\tau}} : \dot{\overline{\overline{\epsilon}}}) = 0$ , ni conduction thermique  $\overline{\nabla} \cdot \overline{\mathbf{q}} = 0$

Linéarisation :  $T_0\rho_0\partial_t s = r$  (liée aux sources)

## Différentielles de $e$ et $p$

$de = T ds - P dv$  différenciée deux fois

compressibilité isentropique  $\chi_s = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s$

dilatation thermique isentropique  $\alpha_s = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_s$

$$dp = \frac{1}{\alpha_s v} ds - \frac{1}{\chi_s v} dv$$

Elimination de  $\partial_t s \Rightarrow \boxed{\partial_t \rho' = \rho_0 \chi_s \partial_t p - \frac{\rho_0 \chi_s}{\alpha_s T_0} r} \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}]$

$r =$  source de chaleur par unité de volume

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho' + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}' = q_m \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}] \\ \rho_0 \partial_t \vec{\nabla}' + \vec{\nabla} p = \vec{F} \quad [N.m^{-3}] \\ \partial_t \rho' - \rho_0 \chi_s \partial_t p = - \frac{\rho_0 \chi_s}{\alpha_s T_0} r \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}] \end{array} \right.$$

- Elimination de  $\partial_t \rho'$  entre (1) et (3)
- $\vec{\nabla} \cdot (2) - \partial_t (1)-(3)$
- $c_0^2 = 1/(\rho_0 \chi_s)$

$$\boxed{(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \partial_{tt}^2) p = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} - \partial_t q_m - \frac{\rho_0 \chi_s}{\alpha_s T_0} \partial_t r \quad [kg.m^{-3}.s^{-2}]}$$

- Exemples concrets de telles sources ?
- Ces termes sont-ils représentatifs ?
- Quel est le mécanisme de source le plus fréquent ?



## Transduction

Couplage au sein du milieu (volume)

Effets direct et inverse : réciprocité (modération)

Usuellement milieu solide (sauf thermoacoustique, ionique)

## Vibroacoustique

Couplage à une interface (surface)

Différence de cohésion  $\Rightarrow$  "champ proche"

Réaction du milieu  $\Rightarrow$  efficacité de rayonnement

## Calcul "loin des sources"

Estimation d'un "débit équivalent"

Propriétés asymptotiques (directivité, ...)

Réaction du milieu approximée

## Bilan énergétique global

Puissance finie  $\Rightarrow$  énergie croissante

Amplitude finie  $\Rightarrow$  "contre-source"

$\Rightarrow$  couplage "externe" (contrôle actif, absorption)

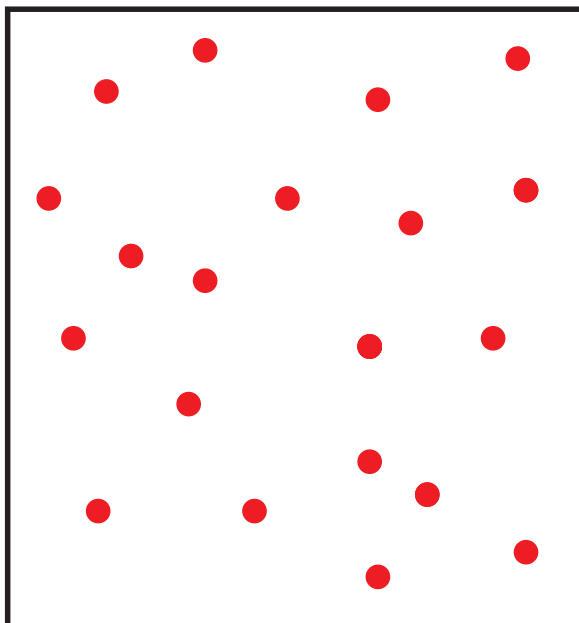
## Equilibre à long terme

Champ "purement réactif" (moyenne nulle)

Absorption limite (ex : problème extérieur)

Phénomènes dissipatifs (localisés ou volumiques)

$\Rightarrow$  Etude de la dissipation acoustique



## Théorie cinétique :

Agitation thermique dominante

Collisions sans interaction

Propriétés statistiques ( $PV = nRT$ ,  $U = \frac{\nu}{2}nRT$ )

Mouvements  $\Rightarrow$  perturbation des collisions

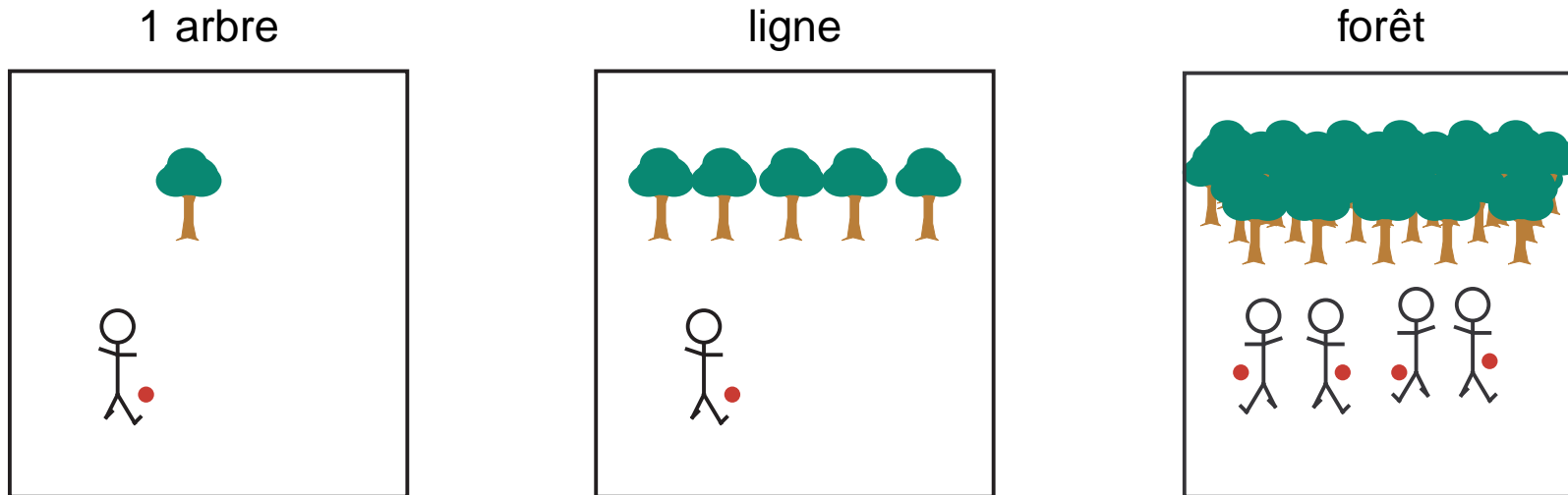
Résultante statistique  $\Rightarrow$  homogénéisation spatiale

## Gaz "idéal" (modèle théorique), mais pas "parfait" :

- Pression = résultante des collisions / interface
- Viscosité = homogénéisation du mouvement local
- Conduction = homogénéisation de l'agitation

$\Rightarrow$  Trois phénomènes liés aux mêmes collisions

## Répartition homogène de tirs et de cibles



- Arbre, ligne : estimation d'une "probabilité d'impact"
- Forêt : probabilité quasi-totale (multiples tirs)
- Statistique plus pertinente : distance d'impact

⇒ échelle caractéristique de la répartition

OdG (foot) : hauteur but = 2m44, diamètre ballon = 22cm

Mole d'air :  $\approx 6.10^{23}$  molécules : taille  $\approx 0.35$  nm, distance  $\approx 3.3$  nm

## Cinétique des gaz

- Problème 3D, molécules = cibles mobiles (identiques)
- Agitation thermique  $\Rightarrow$  section "équivalente"  $S_{eff} = \pi d^2 \sqrt{2}$
- Vitesse moyenne  $\bar{v}$  liée à l'énergie interne

$$\text{Libre parcours moyen } l_{pm} = \frac{1}{S_{eff} n_v}$$

$$\text{Libre délai moyen } \tau_{pm} = l_{pm} / \bar{v}$$

OdG pour l'air :

$\approx 27$  millions de molécules dans un cube de  $1 \mu\text{m}$  de côté

$$l_{pm} \approx 70 \text{ nm}$$

$$\bar{v} \approx 500 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ molécule : } \tau_{pm} = 0.15 \text{ ns} \Rightarrow > 6.10^9 \text{ collisions/seconde!}$$

## Masse volumique

- Volume molaire  $V_m = N_A(S_{eff}l_{pm}) \approx 22.4l$  (CNTP)
- Masse molaire  $M_m$  selon composition (cf tableau périodique)
- $\rho_0 = \frac{M_m}{N_A(S_{eff}l_{pm})}$  (donc  $\rho_0 l_{pm} \approx C^{te}$ )

## Pression statique

- Energie cinétique (thermique)  $E_c \propto k_B T_0$
- Volume "équivalent"  $V_{eff} = S_{eff}l_{pm}$
- Densité volumique  $P_0 = \frac{k_B T_0}{S_{eff}l_{pm}}$  [ $J/m^3$ ]  $\equiv$  [ $Pa$ ]

## Célérité acoustique (G.P.)

- $c_0^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_s} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$
- Lien / énergie cinétique :  $c_0^2 \propto \frac{k_B T_0}{\rho_0 S_{eff}l_{pm}} = \frac{\gamma E_c}{M_{mol}}$
- $c_0^2 \gtrsim \frac{\gamma}{\nu} \bar{v}^2$  (coef. selon hypothèses)

Propagation  $\equiv$  collisions successives  $\Rightarrow$  décalage en espace et en temps

## Homogénéisation via collisions

- Filtre les variations spatiales des grandeurs
- Coefs de transport  $\propto$  nombre collisions
- Variations spatiales comparées à  $l_{pm}$

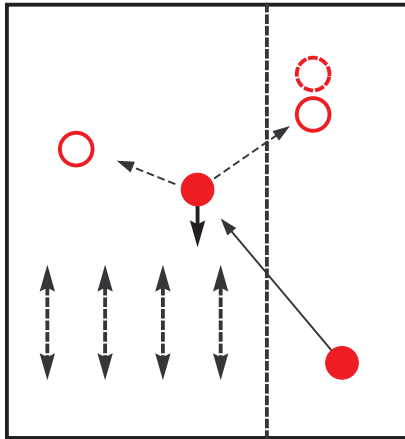
$$\text{Grandeurs Transportées} \propto (\rho_0 \bar{v}) \cdot (l_{pm} \vec{\nabla})$$

## Mécanismes dissipatifs

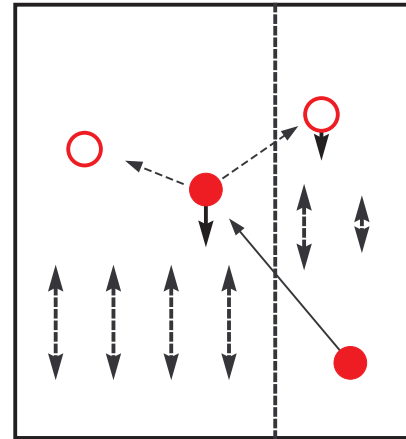
- Viscosité  $\equiv$  transport d'impulsion
- Conduction  $\equiv$  transport d' $E_c$  thermique
- variations lentes / retards propres - sinon Relaxation

Cinétique des gaz très approchée, mais tendances correctes

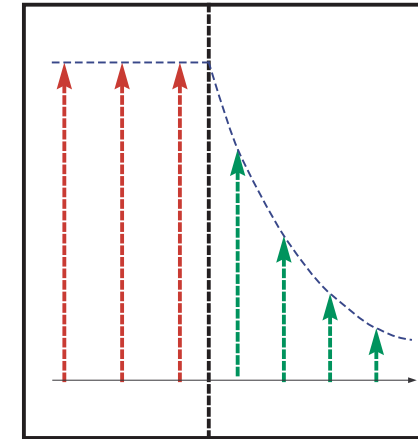
1 collision



résultante



champ



- Homogénéisation de proche en proche
- Contrainte résultante  $\tau = \mu \partial_{\perp} \vec{v}$
- Gaz : coefficient  $\mu \approx \frac{1}{3} \rho_0 c_0 l_{pm}$

cisaillement  $\propto$  gradient vitesse  $\Rightarrow$  fluide "newtonien"



## Deux composantes :

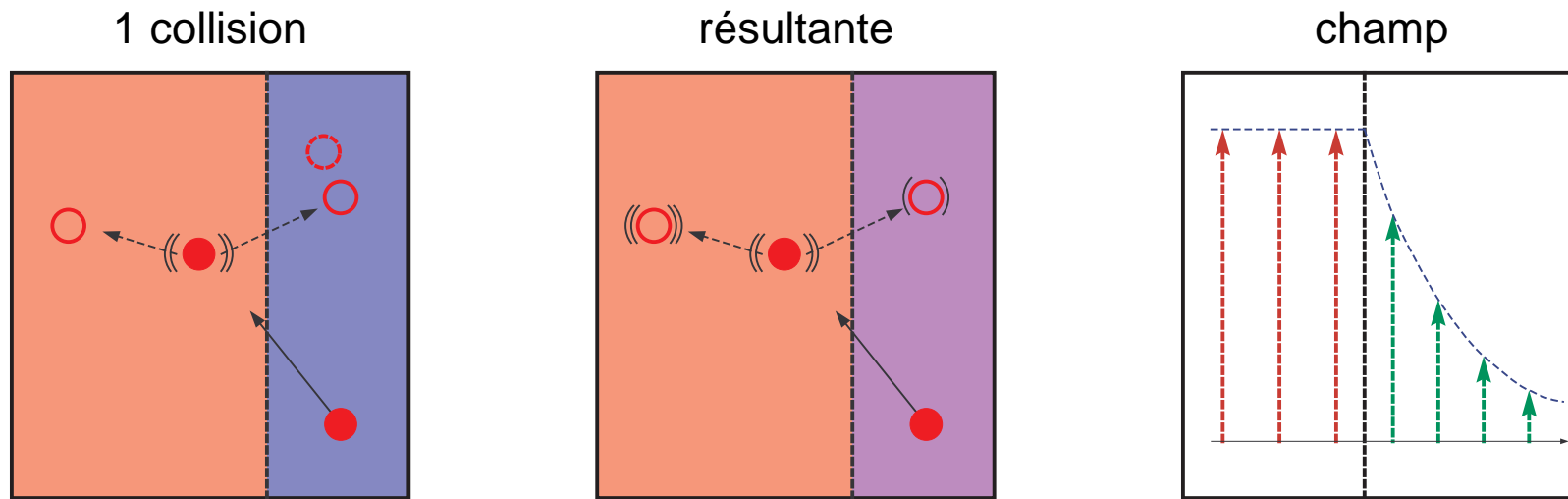
- Expansion radiale (relaxation) : viscosité "de volume" (coefficient  $\eta$ )
- Glissement transversal : viscosité "dynamique" (coefficient  $\mu$ )

Contraintes résultantes  $\overline{\overline{\tau}} = 2\mu \dot{\overline{\overline{\epsilon}}} + \lambda (\text{tr} \dot{\overline{\overline{\epsilon}}}) \overline{\overline{\mathbf{I}}}$

$\mu$  et  $\lambda = (\eta - \frac{2}{3}\mu)$  ne SONT PAS les coefficients de Lamé !

## Fluides réels :

- $\mu$  et  $\eta$  déterminés expérimentalement [ $Pa.s$ ]
- Autre usage :  $\nu = \mu/\rho_0$  coef. de "viscosité cinématique"
- Approximation linéaire  $\Rightarrow$  fluide considéré comme newtonien



- Homogénéisation thermique de proche en proche
- Transport d'agitation thermique :  $c_v T$  où  $c_v \propto k_B$
- coefficient  $\kappa \approx \rho_0 c_0 l_{pm} c_v$  [ $W.m^{-1}.s^{-1}$ ]

Densité de flux résultante  $\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T$

## Influence des paramètres

- Gaz : seul<sup>t</sup>  $E_c$  + collisions, d'où  $\propto \rho_0 l_{pm} c_0$
- Liquides, solides : plus complexe,  $\exists E_p$  (forces de cohésion)
- Très faible influence de la pression ( $\rho \approx$  compensée par  $l_{pm}$ )
- Viscosité croît avec  $T$  pour les gaz, mais décroît pour les liquides
- Conduction thermique croît souvent avec  $T$

Milieu	Air	Eau	Huile	Aluminium	
$\mu$	0.018	0.89	80	???	$10^{-3} Pa.s$
$\kappa$	0.025	0.6	0.15	150	$W.m^{-1}.s^{-1}$

## Importances relatives :

- Nombre de Prandtl :  $Pr = \frac{\mu \gamma c_v}{\kappa}$
- Compare les diffusions visqueuses et thermiques
- $Pr \lesssim 1$  (air),  $Pr \approx 7$  (eau),  $Pr \gtrsim 1000$  (huile)

Equations non isentropiques, linéarisées autour de  $\{P_0, T_0, \vec{v}_0 = \vec{0}\}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = q_m \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}] \quad (C1) \\ \rho_0 \partial_t \vec{v} - \vec{\nabla} : \bar{\sigma} = \vec{F} \quad [N.m^{-3}] \quad (C2) \\ T \rho \dot{s} - (\bar{\tau} : \dot{\bar{\epsilon}}) + \vec{\nabla} \cdot \bar{q} = r \quad [W/m^3] \quad (CE3) \\ 2\mu \dot{\bar{\epsilon}} + \lambda (\text{tr} \dot{\bar{\epsilon}}) \bar{\mathbf{I}} = \bar{\tau} \quad [Pa] \quad (T1) \\ -\kappa \vec{\nabla} T = \bar{q} \quad [W/m^2] \quad (T2) \end{array} \right.$$

3 eq. de conservation (1 combinée/eq. d'état) + 2 équations de transport

## Prise en compte de $\{\mu, \eta, \kappa\}$

- Phénomènes simultanés, liés à  $p$
- Termes de transport dans le bilan d'énergie
- Equations tensorielles  $\rightarrow$  équations vectorielles

## Prise en compte des échanges thermiques

- $T$  fonction de deux variables
- Compressibilité modifiée par  $T$

## Forme "équation d'onde"

- Elimination entre équations  $\Rightarrow$  opérateur( $p$ )
- Nouvelles composantes du champ
- Relations pour en déduire  $\vec{v}$

$\Rightarrow$  Calcul indispensable pour revenir à une expression "simple"

## Conservation de l'impulsion

Linéarisation :  $\dot{f} \approx \partial_t f$

Contraintes  $\bar{\sigma} = \bar{\tau} - p \bar{\mathbf{I}}$

Déformations  $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} + {}^T \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}})$

En exprimant :

$$\begin{cases} \text{tr } \dot{\bar{\epsilon}} &= \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\nabla} : \dot{\bar{\epsilon}} &= \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}}) - \frac{1}{2} \bar{\nabla} \otimes \bar{\nabla} \otimes \bar{\mathbf{v}} \end{cases}$$

(T1) devient :

$$\bar{\nabla} : \bar{\tau} = (\lambda + 2\mu) \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}}) - \mu \bar{\nabla} \otimes \bar{\nabla} \otimes \bar{\mathbf{v}}$$

Insérée dans (C2) qui donne alors :

$$\rho_0 \partial_t \bar{\mathbf{v}} + \bar{\nabla} p - (\lambda + 2\mu) \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \mu \bar{\nabla} \otimes \bar{\nabla} \otimes \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{F}}$$

Dimensions caractéristiques :

$\mu$  et  $\eta$  proportionnels à  $\rho_0 c_0 l_{pm}$  :

$$\ell_v = (\lambda + 2\mu)/(\rho_0 c_0) = (\eta + \frac{4}{3}\mu)/(\rho_0 c_0)$$

$$\ell'_v = \mu/(\rho_0 c_0)$$

Introduites dans l'eq. de Navier-Stokes :

$$\frac{1}{c_0} \partial_t \vec{\mathbf{v}} + \vec{\nabla} \frac{p}{\rho_0 c_0} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \vec{\mathbf{F}} + (\ell_v \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}) - (\ell'_v \vec{\nabla}) \otimes (\vec{\nabla} \otimes \vec{\mathbf{v}}) \quad [s^{-1}]$$

Séparation des composantes de  $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{v}_\ell + \vec{v}_v$$

avec :

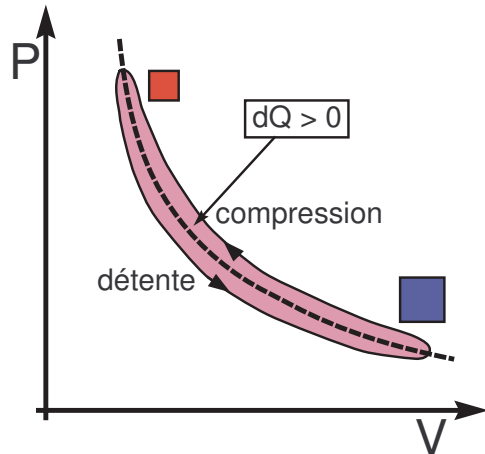
$$\begin{cases} \vec{v}_\ell = \vec{\nabla} \Phi & \text{soit } \vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\ell = 0 \\ \vec{v}_v = \vec{\nabla} \otimes \vec{\Psi} & \text{soit } \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_v = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_0} \partial_t \vec{v}_\ell + \vec{\nabla} \frac{p}{\rho_0 c_0} - (l_v \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\ell) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \vec{F} & [s^{-1}] \\ \frac{1}{c_0} \partial_t \vec{v}_v + (l'_v \vec{\nabla}) \otimes (\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_v) = \vec{0} & [s^{-1}] \end{cases}$$

Pas de terme source pour la composante  $\vec{v}_v$





## Diagramme de Clapeyron

Cycles "compression - détente"

Conduction thermique : échanges avec zones adjacentes

Hystérésis dans le cycle  $\Rightarrow \delta Q > 0$

Transformation irréversible  $E_a \rightarrow \delta Q$

$\delta Q \Rightarrow$  augmentation de l'entropie

## Expression de la variation d'entropie

- Ecart / relation isentropique entre  $P$  et  $T$
- Par définition,  $c_p = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$
- Différentielles de  $E, F, H, G \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \frac{\gamma-1}{\gamma\hat{\beta}}$   
avec  $\hat{\beta} = P\beta = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$

$$dS = \frac{c_p}{T_0} \left( dT - \frac{\gamma-1}{\gamma\hat{\beta}} dP \right)$$

## Bilan du flux de chaleur sur un petit volume $\delta V$

Théorème de Green-Ostrogradski

$$\delta q = \iint_{\delta S} \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \iiint_{\delta V} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{q}} dV, \text{ pour tout } \delta V$$

$$\text{où } \vec{\mathbf{q}} = -\kappa \vec{\nabla} T$$

$$\text{soit, localement : } \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{q}} = -\kappa \Delta T$$

## Conservation de l'énergie

Remplacement dans (CE3)

$$T \rho \dot{s} = (\bar{\tau} : \dot{\bar{\epsilon}}) + \kappa \Delta T + r \quad [W/m^3]$$

## Elimination de la variation d'entropie

$$dS = \frac{c_p}{T_0} (dT - \frac{\gamma-1}{\gamma\hat{\beta}} dP)$$

$$T\rho\dot{s} = (\bar{\bar{\tau}} : \dot{\bar{\bar{\epsilon}}}) + \kappa \Delta T + r$$

soit :

$$\rho c_p (\dot{T} - \frac{\gamma-1}{\gamma\hat{\beta}} \dot{P}) = (\bar{\bar{\tau}} : \dot{\bar{\bar{\epsilon}}}) + \kappa \Delta T + r$$

## Opérateur de diffusion thermique :

Linéarisation autour de  $P_0, T_0$

Dimension caractéristique  $\ell_h = \kappa / (\rho_0 c_0 c_p)$

$$[\frac{1}{c_0} \partial_t - \ell_h \Delta] T = \frac{\gamma-1}{\gamma\hat{\beta}c_0} \partial_t P + \frac{1}{\rho_0 c_0 c_p} [(\bar{\bar{\tau}} : \dot{\bar{\bar{\epsilon}}}) + r] \quad [K/m]$$

$[\frac{1}{c_0} \partial_t - \ell_h \Delta]$  : "dilution" de la chaleur "autour" des sources

$\rho$  différentielle exacte fonction de  $P$  et  $T$

$$\chi_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$$

$$(dP)_P = 0 = \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho dT + \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T d\rho \right]_P$$

$$\text{donc } \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = - \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho$$

$$\text{or } \hat{\beta} = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho$$

$$d\rho = \rho \chi_T (dP - \hat{\beta} dT)$$

En linéarisant autour de  $\{P_0, T_0, \rho_0\}$

$$\text{Avec } \frac{1}{c_0^2} = \rho_0 \chi_T / \gamma$$

$$\rho = \frac{\gamma}{c_0^2} (p - \hat{\beta} T)$$

Equation linéarisée autour de  $\{P_0, T_0, \rho_0\}$

Expression linéarisée de  $\rho$

Elimination dans (C1)

$$\chi_S \partial_t [\gamma(p - \hat{\beta} T)] + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{q_m}{\rho_0} \quad [s-1]$$

Relation entre  $p$  et  $T$

Isentropique :  $\hat{\beta} T = \frac{\gamma-1}{\gamma} p$  d'où  $\rho = \rho_0 \chi_S p$

Sinon  $T$  dépend de deux variables :  $p$  et  $s$

Equations linéarisées autour de  $\{P_0, T_0, \vec{v}_0 = \vec{0}\}$

Viscosité, conduction thermique, non adiabatique

Dimensions caractéristiques  $l_v, l'_v$  et  $l_h$

Terme  $(\bar{\bar{\tau}} : \dot{\bar{\epsilon}})$  du second ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_0^2} \partial_t [\gamma(p - \hat{\beta} T)] + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = q_m \quad (E1) \\ \frac{1}{c_0} \partial_t \vec{v} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0 c_0} - (l_v \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (l'_v \vec{\nabla}) \otimes (\vec{\nabla} \otimes \vec{v}) = \frac{\vec{F}}{\rho_0 c_0} \quad (E2) \\ [\frac{1}{c_0} \partial_t - l_h \Delta] T - \frac{\gamma-1}{\gamma \hat{\beta} c_0} \partial_t p = \frac{r}{\rho_0 c_0 c_p} \quad (E3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_0^2} \partial_t [\gamma(p - \hat{\beta} T)] + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = q_m \quad (E1) \\ \left[ \frac{1}{c_0} \partial_t - \ell_h \Delta \right] T - \frac{\gamma-1}{\gamma \hat{\beta} c_0} \partial_t p = \frac{r}{\rho_0 c_0 c_p} \quad (E3) \end{array} \right.$$

Elimination du terme en  $\partial_t T$  entre (E1) et (E3)

$$\text{Avec } \frac{1}{c_0^2} = \rho_0 \chi_T / \gamma$$

$$\text{Et } \ell_h = \kappa / (\rho_0 c_0 c_p)$$

Il vient alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{q_m}{\rho_0} + \chi_T \left[ \frac{\hat{\beta} \kappa}{\rho_0 c_p} \Delta T - \frac{1}{\gamma} \partial_t p \right] + \frac{\hat{\beta} \chi_T}{\rho_0 c_p} r \quad (E4)$$

$$\left\{ \frac{1}{c_0} \partial_t \vec{v} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0 c_0} - (l_v \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (l'_v \vec{\nabla}) \otimes (\vec{\nabla} \otimes \vec{v}) \right. = \frac{\vec{F}}{\rho_0 c_0} \quad (E2)$$

Elimination du terme en  $\vec{\nabla} \otimes \vec{v}$  dans (E2)

Opérateur  $\vec{\nabla} \cdot$  appliqué à la relation

$$\text{Avec } l_v = (\eta + \frac{4}{3}\mu)/(\rho_0 c_0)$$

Il vient alors :

$$\Delta p = [\rho_0 c_0 l_v \Delta - \rho_0 \partial_t](\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \quad (E5)$$



Elimination du terme en  $\partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  entre (E4) et (E5)

Opérateur  $\partial_t$  appliqué à (E3)

Avec  $\partial_t \Delta T$  exprimé d'après  $\partial_t$  (E3)

Omission d'un terme en  $\ell_h(\ell_v - \ell_h)\Delta\Delta T$

$$\frac{\hat{\beta}\chi_T}{c_p} = \frac{(\gamma-1)\alpha_s}{c_p} = \frac{\rho_0\chi_s}{\alpha_s T_0}$$

Il vient alors (au 1<sup>er</sup> ordre) :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\Delta - \frac{1}{c_0^2}\partial_{tt}^2 + \frac{\ell_{vh}}{c_0}\Delta\partial_t] p = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} - \frac{\partial_t q_m}{\rho_0} - \frac{\rho_0\chi_s}{\alpha_s T_0}\partial_t r \quad [Pa/m^2] \\ \text{Echelle viscothermique : } \ell_{vh} = \ell_v + (\gamma - 1)\ell_h \quad [m] \end{array} \right.$$

## Forme "équations d'ondes" (loin des sources externes)

Trois phénomènes : acoustique, visqueux, thermique

Opérateurs de propagation/diffusion

Trois grandeurs :  $\{p, \vec{v}, T\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{1}{c_0^2} \partial_{tt}^2 - \Delta - \frac{\ell_{vh}}{c_0} \Delta \partial_t \right] p = 0 \\ \left[ \frac{1}{c_0} \partial_t - \ell_h \Delta \right] T = \frac{\gamma-1}{\gamma \beta c_0} \partial_t P \\ \left[ \frac{1}{c_0} \partial_t - \ell'_v \vec{\Delta} \right] \vec{v}_v = \vec{0} \end{array} \right.$$

$\tau_{vh} = \ell_{vh}/c_0$  est un retard caractéristique de la dissipation

## Décomposition à la pulsation $\omega = 2\pi f$

Sans termes "source"

$$\partial_t x(t) \Rightarrow j\omega X$$

$k_0 = \omega/c_0$  : nombre d'onde

Premier ordre :  $\ell_{vh} k_0 \Delta p = -\ell_{vh} k_0^3 p$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\Delta + k_0^2 - jk_0^3 \ell_{vh}] p = 0 \\ [\Delta - \frac{j\omega}{c_0 \ell_h}] T = 0 \\ [\vec{\Delta} - \frac{j\omega}{c_0 \ell'_v}] \vec{v}_v = \vec{0} \end{array} \right.$$

## Similitude "formelle" entre les trois équations

Sans termes "source" et linéarisées au premier ordre

⇒ opérateur commun :  $[\Delta + k_{a/v/h}^2]$

## Equations "de dispersion" :

$$\begin{cases} k_a^2 &= k_0^2 (1 - jk_0 \ell_{vh}) \\ k_h^2 &= -\frac{j\omega}{c_0 \ell_h} \\ k_v^2 &= -\frac{j\omega}{c_0 \ell'_v} \end{cases}$$

Solutions avec dépendance  $e^{j\omega t - jk_{xx}r}$  :

Propagation = déphasage + légère absorption

Diffusion = absorption rapide + dispersion

## DDL's de vibration moléculaire

Nombreuses collisions pour les exciter  
 Transferts d'énergie plus lents  
 Retard / augmentation d'énergie interne  
 Peu influents à température ambiante

## Capacités calorifiques variant dans le temps

Constante de temps spécifique / molécule  
 Valeur dépendant de la fréquence ( $\omega T$ )  
 $c_p, c_v$  et  $\gamma$  fonctions de  $\omega \in \mathbb{C}$

## Comportement fréquentiel

B.F. : tous les DLL participent à l'énergie interne  
 H.F. : les DLL de vibration sont trop lents  
 $\omega T \approx 1$  : pic d'absorption

## Phénomènes viscothermiques

Conduction  $\Rightarrow$  "dilution" de la température acoustique

Viscosité  $\Rightarrow$  vitesse tourbillonnaire (sans source)

Résultante  $\Rightarrow$  (légère) dissipation volumique

Relaxation moléculaire peu influente aux B.F.

## Conséquences pratiques / propagation

Absorption "classique" : à grande distance

Prise en compte dans la constante de propagation  $\in \mathbb{C}$

En général négligeable / phénomènes externes

## Comportement fréquentiel

Absorption croissante avec  $\omega$

Pas de mécanisme similaire à la "plasticité"

Négligeable dans beaucoup de problèmes (taille, fréquence)

$\Rightarrow$  Importance de la dissipation "hors propagation" !

Questions ?