Chapitre 6 : Variables aléatoires réelles

Table des matières

1 Variable aléatoire réelle

1.1 Définitions

Expérience introductive : On lance une pièce de monnaie 3 fois en notant 0 si le résultat obtenu est face et 1 si c'est pile. On considère l'univers des possibles suivant

$\Omega =$ .... alors $\mathrm{Card}(\Omega) =$ ....

Un événement élémentaire possible est par exemple $\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \in \Omega$ qui correspond au cas où les deux premiers lancers ont donné une face et le 3ème a donné un pile. Si la pièce de monnaie est parfaitement équilibrée et que l'on ne triche pas, il est naturel de faire l'hypothèse d'équiprobabilité. Considérons l'application $X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie pour tout $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$ par

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i.$$

X correspond au nombre aléatoire de .... obtenu(s) lors de l'expérience. Par exemple, pour $\omega = (0,0,1)$, on obtient $X(\omega) = \ldots..$ On dit que X est une variable aléatoire réelle (en abrégé v.a.r).

Définition 1 *On appelle tribu borélienne de $\mathbb{R}$ la plus petite tribu*[†] *contenant tous les intervalles de $\mathbb{R}$. On la note $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ et on dit que $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est un espace mesurable ou probabilisable.*

Définitions 2 *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

- *On appelle variable aléatoire réelle X sur Ω toute application*

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

  qui est $(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable c'est à dire telle que ....,

  où $X^{-1}(A) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- *On appelle support de la variable aléatoire réelle X l'ensemble $X(\Omega) = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ des valeurs prises par X. On le note aussi Im(X).*

Exemple 3 *Reprenons l'expérience introductive du lancer de pièce. Notant X la variable aléatoire correspondant au nombre de pile(s) obtenu(s) après trois lancers, on a*

$$X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\} = \left\{\sum_{i=1}^{3} \omega_i, \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega\right\} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}.$$

Définitions 4 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle sur Ω.*

1. *On dit que X est une variable aléatoire discrète finie si $X(\Omega)$ est fini.*
2. *On dit que X est une variable aléatoire discrète infinie si $X(\Omega)$ est infini dénombrable*[*]*.*
3. *On dit que X est une variable aléatoire continue si $X(\Omega)$ est indénombrable.*

Remarque 5 *Lorsque $X(\Omega)$ est fini, on dit aussi que X est une v.a. à support fini. Lorsque $X(\Omega)$ est infini dénombrable, on dit aussi que X est une v.a. à support infini dénombrable. Dans ce cours, nous nous focaliserons sur les variables aléatoires discrètes : c'est à dire lorsque $X(\Omega)$ est fini ou bien lorsque $X(\Omega)$ est infini et dénombrable. Les variables aléatoires continues seront vues au Semestre 4.*

†. au sens de l'inclusion
*. Un ensemble E est infini dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$

Exemples 6 *1. Le résultat d'un lancer de dé est une variable aléatoire discrète finie X. En effet, en notant $\Omega = \{..............................\}$, on définit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ par $X(i) = ...$, $\forall i \in \Omega$.*

Alors $X(\Omega) = \{..............................\}$ est fini.

2. Le nombre de lancers d'une pièce nécessaires pour obtenir un pile est une variable aléatoire discrète car $X(\Omega) = ...$ est infini dénombrable.
3. La taille en mètre des individus d'une population est une variable aléatoire continue car $X(\Omega) = [...........]$ est indénombrable.

1.2 Loi d'une variable aléatoire réelle

Remarque 7 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle sur Ω. On utilisera les notations suivantes :*

- *$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ est un évènement de Ω noté $[X \in A]$.*
- *$\forall x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ est un évènement de Ω noté $[X = x]$.*
- *$\forall x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}$ est un évènement de Ω noté $[X \leqslant x]$.*

Proposition 8 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle sur Ω. Alors l'application $\mathbb{P}_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ définie pour élément A de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ par*

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}([X \in A])$$

est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Remarque 9 *Pour tout élément A de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, on notera indifféremment $\mathbb{P}([X \in A]) = \mathbb{P}(X \in A)$ de même que pour tout réel x, $\mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}(X = x)$. Notons que comme X est une variable aléatoire, on sait alors par définition que $X^{-1}(A)$ est un élément de $\mathscr{A}$, c'est donc bien un évènement de l'univers Ω et considérer sa probabilité a bien un sens.*

Exemple 10 *On lance un dé et on note le résultat obtenu. L'univers des possibles est alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On définit la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ par $X(i) = i$, $\forall i \in \Omega$.*
Ainsi, $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et en supposant que le dé n'est pas truqué, on fait une hypothèse d'équiprobabilité ce qui nous donne $\forall i \in \Omega$, $\mathbb{P}(X = i) =$. On peut en déduire que

$\mathbb{P}_X(]2, +\infty[) = \mathbb{P}(X > 2) = \mathbb{P}(X \in]2, +\infty[) = \mathbb{P}(........................) =$ *et* $\mathbb{P}_X(]-\infty, 0]) = \mathbb{P}(X \leqslant 0) = \mathbb{P}(\quad) = ...$

Définitions 11 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur Ω et $\mathbb{P}_X$ sa mesure de probabilité associée. On appelle loi de probabilité de X l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{B}(\mathbb{R}) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A). \end{array}$$

Si on appelle $\mathcal{L}$ cette loi, on dit que X suit la loi $\mathcal{L}$ et on note $X \sim \mathcal{L}$.

Remarques 12 *1. Dans le cas où X est une variable aléatoire discrète, $\mathbb{P}_X$ est nulle partout sauf sur l'ensemble discret $X(\Omega)$ des valeurs prises par X. Ainsi pour définir la loi d'une variable aléatoire discrète X, il suffit seulement de déterminer pour tout $x \in X(\Omega)$*

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x).$$

2. Attention, si deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi $\mathcal{L}$, cela ne veut pas dire qu'elles prennent simultanément les mêmes valeurs mais que l'ensemble des valeurs prises par X est le même que celui de Y et ce avec les mêmes probabilités. Décrire le comportement simultané de deux variables aléatoires est souvent difficile. Le cas le plus favorable est celui où les variables sont indépendantes (voir Section 2.2).

Exemple 13 *Reprenons l'expérience introductive du lancer de pièce. Notant X la variable aléatoire correspondant au nombre de pile(s) obtenu(s) après trois lancers, on a $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$. Déterminons la loi de X. Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout x dans $X(\Omega)$. On a*

- $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}($*« Obtenir 3 faces »*$) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\mathbb{P}(X = 1) = \underbrace{\binom{\quad}{\quad}}_{\textit{Position du pile}} \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\mathbb{P}(X = 3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \big(\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 3)\big) = \dfrac{3}{8}.$

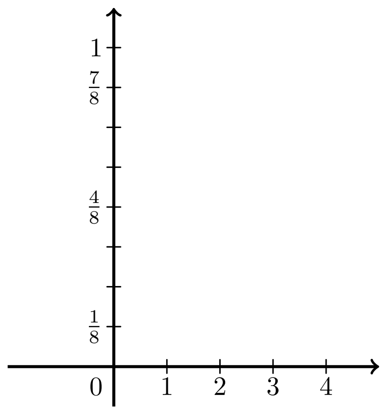
1.3 Fonction de répartition

Définition 14 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle fonction de répartition de X la fonction*

$$\begin{array}{rcl} F_X : \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x). \end{array}$$

Exemple 15 *Reprenons l'expérience introductive du lancer de pièce. Notant X la variable aléatoire correspondant au nombre de pile(s) obtenu(s) après trois lancers, on a $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.*

- *Si* $x < 0$ *alors* $F_X(x) = \mathbb{P}(X < 0) = \ldots..$
- *Si* $x \in [0,1[$ *alors* $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(X = \ldots.) = \ldots\ldots\ldots.$
- *Si* $x \in [1,2[$ *alors* $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(X = \ldots.) + \mathbb{P}(X = \ldots.) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$
- *Si* $x \in [2,3[$ *alors* $F_X(x) = \mathbb{P}(X = \ldots.) + \mathbb{P}(X = \ldots.) + \mathbb{P}(X = \ldots.) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}.$
- *Si* $x \geqslant 3$ *alors* $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \ldots.$ *(évènement certain).*



Proposition 16 *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* Ω *et* F_X *sa fonction de répartition. Alors*

1. F_X *est une fonction croissante.*
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.
3. $\forall a \in \mathbb{R}$, F_X *est continue à droite en* a *et admet une limite finie à gauche en* a.
4. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$.
5. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ *et* $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

Preuve.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y \leqslant x$. Alors $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant y\} \subset \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}$ et donc

$$F_X(y) = \mathbb{P}(X \leqslant y) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant y\}\big) \leqslant \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}\big) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = F_X(x)$$

   et F_X est croissante.
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on réécrit l'évènement $[X \leqslant b]$ comme une reunion disjointe $[X \leqslant a] \cup [a < X \leqslant b]$ et en utilisant la définition d'une probabilité, on a

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \leqslant b)}_{=F_X(b)} = \underbrace{\mathbb{P}(X \leqslant a)}_{F_X(a)} + \mathbb{P}(a < X \leqslant b) \text{ et on a le résultat.}$$

3. Admis[†].
4. $\forall a \in \mathbb{R}$, on écrit l'évènement $[X \in \mathbb{R}]$ comme réunion disjointe $[X \leqslant a] \cup [X > a]$ et alors

$$1 = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \leqslant a) + \mathbb{P}(X > a) \text{ d'où } 1 = F_X(a) + \mathbb{P}(X > a).$$

5. Admis[†].

■

Remarque 17 *Lorsque* X *une variable aléatoire discrète, sa fonction de répartition* F_X *est une fonction en escaliers présentant des sauts aux points* $x_i \in X(\Omega)$. *L'amplitude du saut au point* $x_i \in X(\Omega)$ *est égale à* $\mathbb{P}(X = x_i)$.

2 Variables aléatoires à support fini

Dans cette partie on ne considère que des variables aléatoires X telles que $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

†. Une preuve de ce résultat peut-être consultée en suivant le lien https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00637007v1/document, Proposition 2.12 p.40.

†. Une preuve de ce résultat peut-être consultée en suivant le lien https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00637007v1/document, Proposition 2.12 p.40.

2.1 Espérance, variance et écart type

Définition 18 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}$ fixé et X une variable aléatoire discrète finie sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$. On appelle espérance mathématique de X le réel*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Exemple 19 *Considérons un joueur qui joue à « Pile ou Face » de la façon suivante : le joueur lance sa pièce une fois et gagne 1€ s'il obtient un pile et 0€ s'il obtient une face. On note X la variable aléatoire correspondant au gain obtenu par le joueur. L'espérance de X représente sa valeur moyenne. On a Im$X = \{$...........$\}$ et $\mathbb{E}(X) =$ ...... ce qui signifie que le gain moyen du joueur est de ....€, d'où le terme d'espérance, synonyme de « moyenne ».*

Remarque 20 *Intuitivement, l'espérance d'une variable aléatoire est la valeur que l'on s'attend à trouver en moyenne si l'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire.*

Théorème 21 *(Théorème de transfert)*
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}$ fixé, X une variable aléatoire discrète finie sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $\varphi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

Preuve. Admise. ■

Proposition 22 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X, Y deux variables aléatoires discrètes finies sur Ω. Alors $\forall a, b \in \mathbb{R}$*

1. $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
2. $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.
3. $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = 0$.

Preuve. Admise. ■

Définitions 23 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}$ fixé et X une variable aléatoire discrète finie sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$.*

- *On appelle variance de X le réel $Var(X) = \mathbb{E}\Big(\big[X - \mathbb{E}(X)\big]^2\Big)$.*
- *On appelle écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.*

Remarque 24 *La variance et l'écart type mesurent la dispersion de X autour de sa moyenne. Notons que ces deux réels sont toujours positifs. De plus en utilisant le Théorème de transfert avec $\varphi : y \mapsto (y - \mathbb{E}(X))^2$ on a*

$$Var(X) = \mathbb{E}\Big(\big[X - \mathbb{E}(X)\big]^2\Big) = \mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_i).$$

Cette formule est peu commode, c'est pourquoi en pratique on utilise le résultat suivant.

Théorème 25 *(Koening-Huyghens)*
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire discrète finie sur* Ω. *Alors*

$$\textit{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Preuve.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Var}(X) & = & \mathbb{E}\Big(\big[X - \mathbb{E}(X)\big]^2\Big) \\ & = & \mathbb{E}\Big(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2\Big) \\ & = & \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ & = & \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2. \end{array}$$

■

Proposition 26 *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire discrète finie sur* Ω. *Alors pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$

$$\textit{Var}(aX + b) = a^2 \textit{Var}(X).$$

Preuve.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Var}(aX+b) & = & \mathbb{E}\big((aX+b)^2\big) - \big(\mathbb{E}(aX+b)\big)^2 \\ & = & \mathbb{E}\big(a^2X^2 + 2abX + b^2\big) - \big(a\mathbb{E}(X) + b\big)^2 \\ & = & a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - \Big(a^2\big(\mathbb{E}(X)\big)^2 + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2\Big) \\ & = & a^2\mathbb{E}(X^2) - a^2\big(E(X)\big)^2 \\ & = & a^2\Big[\mathbb{E}(X^2) - \big(E(X)\big)^2\Big] \\ & = & a^2\mathrm{Var}(X). \end{array}$$

■

Remarque 27 *En particulier, la variance d'une constante est nulle.*

2.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 28 *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* $n, m \in \mathbb{N}$ *fixés et* X, Y *deux variables aléatoires discrètes finies sur* Ω *avec* $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_m\}$ *et* $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_n\}$. *On dit que* X *et* Y *sont indépendantes pour* $\mathbb{P}$ *si et seulement si*

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}, \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j),$$

autrement dit, les évènements $[X = x_i]$ *et* $[Y = y_j]$ *sont indépendants.*

Proposition 29 *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X, Y *deux variables aléatoires discrètes finies sur* Ω*. Si* X *et* Y *sont indépendantes pour* $\mathbb{P}$*, alors*

$$\mathbb{E}(X \times Y) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y) \quad \textit{et} \quad Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Remarque 30 *Attention, la réciproque est fausse, voir Remarque 61.*

Preuve. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ fixés. Notons $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_n\}$. Alors en utilisant l'indépendance de X et Y

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X \times Y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \times \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbb{P}(Y = y_j) \\
&= \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y).
\end{aligned}$$

En utilisant ceci, on obtient :

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}\big((X+Y)^2\big) - \big(\mathbb{E}(X+Y)\big)^2 \\
&= \mathbb{E}\big(X^2 + 2XY + Y^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 + \mathbb{E}(Y^2) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \\
&= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).
\end{aligned}$$

■

2.3 Lois usuelles

2.3.1 Loi uniforme $\mathscr{U}(n)$

Définition 31 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. On dit qu'une variable aléatoire* X *suit la loi uniforme sur* $\Omega = \{1, .., n\}$ *si* $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$ *et si toutes les probabilités* $\mathbb{P}(X = i)$ *sont égales c'est à dire*

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}, \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

On note $X \sim \mathscr{U}(n)$*.*

Exemple 32 *On lance un dé à* 6 *faces non truqué. Le résultat de ce lancer de dé est une variable aléatoire* X *telle que* $X(\Omega) = \{1, ..., 6\}$ *et* $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{6}$*,* $\forall i \in \{1, ..., 6\}$*. On a* $X \sim \mathscr{U}(6)$*.*

Proposition 33 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* $X \sim \mathscr{U}(n)$ *alors*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } Var(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

2.3.2 Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$

Définition 34 *On appelle* <u>*épreuve de Bernoulli*</u> *de paramètre* $p \in [0,1]$ *toute expérience aléatoire comportant deux issues : le succès ou l'échec.*

Exemple 35 *On tire au hasard une boule dans une urne comptant* 7 *boules blanches et* 3 *boules noires. On considère comme un succès le fait de tirer une boule noire, l'échec est alors le fait de tirer une boule blanche. Cette expérience est une épreuve de Bernoulli de paramètre* $\frac{3}{10}$ *qui correspond à la probabilité de tirer une boule noire.*

Définition 36 *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* $p \in [0,1]$ *et* $A \in \mathscr{A}$ *avec* $\mathbb{P}(A) = p$. *On dit que* X *suit la* <u>*loi de Bernoulli*</u> *de paramètre* p *si*

$$\begin{cases} X = 1 & \text{si A est réalisé} \\ X = 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

On a donc $X(\Omega) = \{0,1\}$, $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A) = p$ *et* $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$. *On note* $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Remarque 37 *La loi de Bernoulli est la loi de la variable aléatoire qui code le résultat d'une épreuve de Bernoulli :* 1 *pour succès et* 0 *pour échec.*

Exemple 38 *On considère le jeu du Pile ou Face et* X *la variable aléatoire définie par*

$$\begin{cases} X = 1 & \text{si Pile} \\ X = 0 & \text{si Face}. \end{cases}$$

Alors si la pièce n'est pas truquée, $X \sim \mathscr{B}(\frac{1}{2})$.

Proposition 39 *Soit* $p \in [0,1]$. *Si* $X \sim \mathscr{B}(p)$ *alors*

$$\mathbb{E}(X) = p \text{ et } Var(X) = p(1-p).$$

2.3.3 Loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$

Définition 40 *On appelle* <u>*schéma de Bernoulli*</u> *de paramètres* (n,p) *(avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in [0,1]$*) toute expérience consistant à répéter* n *fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre* p.

Expérience modèle : On considère une urne contenant N boules réparties en N_1 boules blanches et $N_2 = N - N_1$ boules noires. On effectue n tirages avec remise ($n \in \mathbb{N}^*$) et on s'intéresse à la variable aléatoire X : « Nombre de boules blanches obtenues. »
On note $p = \frac{N_1}{N}$ la proportion de boules blanches dans l'urne. On a $\mathrm{Im}(X) = \{..........................\}$ et pour tout $k \in \mathrm{Im}(X)$, l'évènement $[X = k]$ correspond à la situation suivante :

- k boules blanches tirées, chaque boule ayant la probabilité p d'être tirée.
- $n - k$ boules noires tirées, chaque boule ayant la probabilité $1 - p$ d'être tirée.
- Il y a $\binom{\ }{\ }$ façons de choisir les places de tirage pour les k boules blanches.

On obtient

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{\ }{\ } \times \qquad \times$$

Définition 41 *On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres (n, p), $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$ si $\mathrm{Im}(X) = \{0, ..., n\}$ et $\forall k \in \{0, ..., n\}$,*

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},$$

et on note $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Remarques 42 *1. Autrement dit, la variable aléatoire X décrit le nombre de succès obtenus au cours d'un schéma de Bernoulli de paramètres (n, p).*
2. On peut rencontrer la définition alternative suivante : Soient $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $Y_1, ... Y_n$ n variables aléatoires indépendantes deux à deux suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On appelle loi binomiale de paramètres (n, p), la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire

$$X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n.$$

Proposition 43 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ alors*

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ et } Var(X) = np(1 - p).$$

Exemple 44 *On lance un dé 12 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois le résultat 6 ? Notons X la variable aléatoire « Nombre de 6 obtenus au cours des 12 lancers. » On a*

$\mathrm{Im}(X) = \{ \qquad \}$ et $X \sim \mathscr{B}(\quad , \quad)$ donc $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{12}{2} \times (\frac{1}{6})^2 \times (1 - \frac{1}{6})^{12-2}$.

2.3.4 Loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N, n, p)$

Expérience modèle : On considère une urne contenant N boules réparties en N_1 boules blanches et $N_2 = N - N_1$ boules noires. On effectue n tirages sans remise en supposant que $n \leqslant N_1$ et $n \leqslant N_2$. On s'intéresse à la variable aléatoire X : « Nombre de boules blanches obtenues. » Notons $p = \frac{N_1}{N}$ la proportion de boules blanches dans l'urne, on a donc $N_2 = (1 - p)N$. Alors $\mathrm{Im}(X) = \{ \qquad \}$ et $\forall k \in \mathrm{Im}(X)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{\ }{\ } \times \binom{\ }{\ }}{\binom{\ }{\ }} = \frac{\binom{\ }{\ }\binom{\ }{\ }}{\binom{\ }{\ }}.$$

En effet, il y a $\binom{N}{n}$ tirages possibles, $\binom{N_1}{k}$ façons de tirer k boules blanches et $\binom{N_2}{n-k}$ façons de tirer $n - k$ boules noires.

Remarque 45 *Comme $n \leqslant N_1$ et $n \leqslant N_2$, il y a donc moins de tirages que de boules blanches et de boules noires.*

Définition 46 *Soient $N, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ tels que $N \geqslant n$ et $Np \in \mathbb{N}$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique de paramètres (N, n, p) si $\mathit{Im}(X) = \{0, \dots, n\}$ et $\forall k \in \{0, \dots, n\}$,*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On note alors $X \sim \mathscr{H}(N, n, p)$.

Proposition 47 *Soient $N, n \in \mathbb{N}^*$, $N \geqslant n$, $p \in [0,1]$ et $Np \in \mathbb{N}$. Si $X \sim \mathscr{H}(N, n, p)$ alors*

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ et } \mathit{Var}(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}.$$

3 Couple de variables aléatoires à support fini

3.1 Définitions

Définition 48 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n, m \in \mathbb{N}^*$ fixés et X, Y deux variables aléatoires discrètes finies sur Ω telles que*

$$\mathit{Im}(X) = \{x_1, \dots, x_m\} \text{ et } \mathit{Im}(Y) = \{y_1, \dots, y_n\}.$$

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans

$$\mathit{Im}(X) \times \mathit{Im}(Y) = \big\{(x_i, y_j), i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\big\}$$

dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}\big((X, Y) = (x_i, y_j)\big) = \mathbb{P}\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big), \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Cette loi est appelée loi conjointe de X et Y.

Remarque 49 *Lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, on a*

$$\mathbb{P}\big((X, Y) = (x_i, y_j)\big) = \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j), \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Définition 50 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires discrètes finies sur Ω. On appelle lois marginales du couple (X, Y) la loi de X et la loi de Y.*

3.2 Propriétés

Proposition 51 *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* $n, m \in \mathbb{N}^*$ *fixés et* X, Y *deux variables aléatoires discrètes finies sur* Ω *telles que*

$$\text{Im}(X) = \{x_1, ..., x_m\} \text{ et } \text{Im}(Y) = \{y_1, ..., y_n\}.$$

Alors pour tout $i \in \{1, ..., m\}$ *et tout* $j \in \{1, ..., n\}$

1. $\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\big((X,Y) = (x_i, y_j)\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}\big((X,Y) = (x_i, y_j)\big).$
2. $\mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \dfrac{\mathbb{P}\big((X,Y) = (x_i, y_j)\big)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} = \dfrac{\mathbb{P}\big((X,Y) = (x_i, y_j)\big)}{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}\big((X,Y) = (x_i, y_j)\big)},$

   et $\mathbb{P}(Y = y_j | X = x_i) = \dfrac{\mathbb{P}\big((X,Y) = (x_i, y_j)\big)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\big((X,Y) = (x_i, y_j)\big)}.$

Preuve. Notons que l'on peut écrire l'évènement $[X = x_i]$ comme une réunion disjointe d'évènements $[X = x_i] = \bigcup_{j=1}^{n} \big[[X = x_i] \cap [Y = y_j]\big]$ et alors

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\big((X,Y) = (x_i, y_j)\big).$$

■

Remarque 52 *Ce résultat nous montre que si l'on connait la loi du couple* (X, Y)*, alors on connait la loi de* X *et celle de* Y*. Attention, la réciproque est fausse, car si on connait seulement la loi de* X *et la loi de* Y*, on ne peut pas en déduire celle du couple* (X, Y) *car a priori on ne connait pas l'influence de* X *sur* Y *et de* Y *sur* X*.*

Exemple 53 *On considère une urne contenant* 2 *boules blanches et* 3 *boules noires. On effectue deux tirages successifs en suivant la règle suivante :*

- *Si la boule tirée est blanche, on ne la remet pas dans l'urne.*
- *Si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne.*

Soient X *et* Y *les variables aléatoires définies par*

$$\begin{cases} X = 1 & \text{si la 1ère boule tirée est blanche} \\ X = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = 1 & \text{si la 2ème boule tirée est blanche} \\ Y = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quelle est la loi du couple (X, Y) *? On a* $\text{Im}(X, Y) = \big\{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\big\}$ *et*

- $\mathbb{P}\big((X,Y) = (0,0)\big) = \mathbb{P}\big([X = 0] \cap [Y = 0]\big) = \mathbb{P}\big([Y = 0] \mid [X = 0]\big)\mathbb{P}(X = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}.$
- $\mathbb{P}\big((X,Y) = (1,0)\big) = \mathbb{P}\big([Y = 0] \mid [X = 1]\big)\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10}.$
- $\mathbb{P}\big((X,Y) = (0,1)\big) = \mathbb{P}\big([Y = 1] \mid [X = 0]\big)\mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}.$
- $\mathbb{P}\big((X,Y) = (1,1)\big) = \mathbb{P}\big([Y = 1] \mid [X = 1]\big)\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$

Quelles sont les lois marginales du couple (X,Y) ?

$Y \backslash X$	0	1	
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{33}{50}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{17}{50}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{10}$	1

$$\begin{array}{rcl}
\bullet\ \mathbb{P}(X=0) & = & \dfrac{3}{5} \\
\bullet\ \mathbb{P}(X=1) & = & \dfrac{2}{5} \\
\bullet\ \mathbb{P}(Y=0) & = & \mathbb{P}\big((X,Y)=(0,0)\big)+\mathbb{P}\big((X,Y)=(1,0)\big) \\
& = & \dfrac{9}{25}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{33}{50} \\
\bullet\ \mathbb{P}(Y=1) & = & \mathbb{P}\big((X,Y)=(0,1)\big)+\mathbb{P}\big((X,Y)=(1,1)\big)=\dfrac{17}{50}.
\end{array}$$

3.3 Notion de covariance

Nous avons vu que la variance d'une variable aléatoire X mesurait la dispersion des valeurs prises par X autour de sa moyenne. Nous introduisons ici une notion analogue pour un couple de variables aléatoires discrètes (X,Y) appelée covariance qui sert à quantifier leurs écarts conjoints par rapport à leurs espérances respectives.

Définition 54 *Soient $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et X,Y deux variables aléatoires discrètes finies sur Ω. On appelle <u>covariance</u> de X et Y le réel*

$$\textit{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\Big).$$

Remarque 55 *Intuitivement, la covariance caractérise les variations simultanées de deux variables aléatoires : elle est positive lorsque les écarts entre les variables et leurs moyennes ont tendance à être de même signe et négative dans le cas contraire.*

Proposition 56 *Soient $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et X,Y deux variables aléatoires discrètes finies sur Ω. On a les propriétés suivantes*

1. $\textit{Cov}(X,X)=\textit{Var}(X)$.
2. $\textit{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
3. $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $\textit{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\times\textit{Cov}(X,Y)$.
4. $\textit{Var}(X+Y)=\textit{Var}(X)+2\times\textit{Cov}(X,Y)+\textit{Var}(Y)$.
5. *Si X et Y sont indépendantes <u>alors</u> $\textit{Cov}(X,Y)=0$.*

Remarque 57 *Attention la réciproque du point* 5. *est fausse.*

Preuve. 1. $\mathrm{Cov}(X,X)=\mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\Big)=\mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2\Big)=\mathrm{Var}(X)$.
2. En utilisant la linéarité de l'espérance, on a

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Cov}(X,Y) & = & \mathbb{E}\Big(XY-\mathbb{E}(X)\times Y+\mathbb{E}(X)\times\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(Y)\times X\Big) \\
& = & \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\times\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(X)\times\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(Y)\times\mathbb{E}(X) \\
& = & \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).
\end{array}$$

3. $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(aX+b, cY+d) &= \mathbb{E}\Big(\big(aX+b-\mathbb{E}(aX+b)\big)\times\big(cY+d-\mathbb{E}(cY+d)\big)\Big)\\
&= \mathbb{E}\Big(\big(aX+b-a\mathbb{E}(X)-b\big)\times\big(cY+d-c\mathbb{E}(Y)-d\big)\Big)\\
&= \mathbb{E}\Big(\big(a(X-\mathbb{E}(X))\big)\times\big(c(Y-\mathbb{E}(Y))\big)\Big)\\
&= \mathbb{E}\Big(ac\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\times\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\Big).\\
&= ac\times\text{Cov}(X,Y).
\end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned}
&\text{Var}(X+Y)\\
=\;& \mathbb{E}\Big(\big(X+Y-\mathbb{E}(X+Y)\big)^2\Big)\\
=\;& \mathbb{E}\Big(\big(X+Y-\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)\big)^2\Big)\\
=\;& \mathbb{E}\Big(X^2+Y^2+(\mathbb{E}(X))^2+(\mathbb{E}(Y))^2+2XY-2X\mathbb{E}(X)-2Y\mathbb{E}(Y)+2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)-2\mathbb{E}(X)Y-2\mathbb{E}(Y)X\Big)\\
=\;& \mathbb{E}(X^2)+\mathbb{E}(Y^2)+2\mathbb{E}(XY)-(\mathbb{E}(X))^2-(\mathbb{E}(Y))^2+2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)-2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)-2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\
=\;& \mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2+\mathbb{E}(Y^2)-(\mathbb{E}(Y))^2+2(\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))\\
=\;& \text{Var}(X)+\text{Var}(Y)+2\times\text{Cov}(X,Y).
\end{aligned}$$

5. Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\times\mathbb{E}(Y)$ donc

$$\text{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=0.$$

■

Remarque 58 *En utilisant l'égalité Cov$(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\times\mathbb{E}(Y)$, le calcul de la covariance peut se faire de façon explicite comme suit :*

$$Cov(X,Y)=\sum_{i,j}x_iy_j\mathbb{P}\big((X,Y)=(x_i,y_j)\big)-\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\mathbb{P}(X=x_i)\right)\times\left(\sum_{j=1}^{n}y_j\mathbb{P}(Y=y_j)\right).$$

Exemple 59 *Reprenons l'exemple 53. On a*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 0\times\mathbb{P}(X=0)+1\times\mathbb{P}(X=1)=\frac{2}{5}\\
\mathbb{E}(Y) &= 0\times\mathbb{P}(Y=0)+1\times\mathbb{P}(Y=1)=\frac{17}{50}\\
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_iy_j\mathbb{P}\big((X,Y)=(x_i,y_j)\big)\\
&= 1\times1\times\mathbb{P}\big((X,Y)=(1,1)\big)=\frac{1}{10}\\
\textit{donc } Cov(X,Y) &= \frac{1}{10}-\frac{2}{5}\times\frac{17}{50}=-0,036.
\end{aligned}$$

3.4 Notion de corrélation linéaire

La corrélation entre deux variables aléatoires est une notion de liaison/relation entre ces deux variables qui sert entre autres choses à contredire leur indépendance. Nous nous intéresserons ici aux relations linéaires entre deux variables alétaoires X et Y à savoir l'existence de coefficients $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $X=aY+b$.

Définition 60 *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X, Y *deux variables aléatoires discrètes finies sur* Ω *telles que* $Var(X) \neq 0$ *et* $Var(Y) \neq 0$*. On appelle* <u>*coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson*</u> *entre* X *et* Y *le réel*

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X) \times \sigma(Y)} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \times Var(Y)}}.$$

Remarque 61 *Lorsque* $Cov(X,Y) = 0$*, on dit que* X *et* Y *sont* <u>*non corrélées linéairement*</u>*. Notons que si deux variables aléatoires sont indépendantes alors elles sont non corrélées linéairement. Notons que la réciproque est fausse (un coefficient nul n'implique pas l'indépendance) car d'autres types de corrélation sont possibles (par exemple* $Z = W^2$*...).* ***Contre-exemple :*** *on considère deux variables aléatoires* X *et* Y *pour lesquelles on connait la loi du couple* (X,Y) *donnée par le tableau suivant :*

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{1}{2}$	0
1	0	$\frac{1}{4}$
-1	0	$\frac{1}{4}$

D'après le tableau, $\mathbb{P}\big((X,Y) = (0,0)\big) =$

$\mathbb{P}(X = 0) =$ *et* $\mathbb{P}(Y = 0) =$

donc $\mathbb{P}\big((X,Y) = (0,0)\big) \neq \mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = 0)$*,* X *et* Y *ne sont donc pas indépendantes. On a* $\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) =$

$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbb{P}(Y = 0) + 1 \times \mathbb{P}(Y = 1) - 1 \times \mathbb{P}(Y = -1) =$

En notant $Im(X) = \{x_1, x_2\}$ *et* $Im(Y) = \{y_1, y_2, y_3\}$ *avec* $x_1 = 0, x_2 = 1$*,* $y_1 = 0, y_2 = 1$ *et* $y_3 = -1$ *on a*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} x_i y_j \mathbb{P}\big((X,Y) = (x_i, y_j)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{3}\Big[x_1 y_j \mathbb{P}\big((X,Y) = (x_1, y_j)\big) + x_2 y_j \mathbb{P}\big((X,Y) = (x_2, y_j)\big)\Big] \\
&= x_2 y_1 \mathbb{P}\big((X,Y) = (x_2, y_1)\big) + x_2 y_2 \mathbb{P}\big((X,Y) = (x_2, y_2)\big) + x_2 y_3 \mathbb{P}\big((X,Y) = (x_2, y_3)\big) \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

Finalement, $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) =$ *et pourtant* X *et* Y *ne sont pas indépendantes.*

Proposition 62 *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X, Y *deux variables aléatoires discrètes finies sur* Ω *telles que* $Var(X) \neq 0$ *et* $Var(Y) \neq 0$*. Alors*

1. $-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$.
2. $|\rho(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : Y = aX + b$.

Preuve. Admise. ■

Remarque 63 *Le coefficient de corrélation linéaire mesure la dépendance affine entre X et Y. Il est égal à 1 dans le cas où l'une des variables est une fonction affine croissante de l'autre variable, à -1 dans le cas où une variable est une fonction affine et décroissante. Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables. Plus le coefficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation linéaire entre les variables est forte. Une corrélation égale à 0 signifie que les variables ne sont pas corrélées linéairement, elles peuvent néanmoins être corrélées non-linéairement. Pour les plus curieux sur ces histoires de corrélation, voir ce poly de cours :* `http://grasland.script.univ-paris-diderot.fr/STAT98/stat98_6/stat98_6.htm`

Exemple 64 *Reprenons l'exemple 53. On a montré que $\mathbb{E}(X) = \frac{2}{5}$ et $\mathbb{E}(Y) = \frac{17}{50}$. De plus, en utilisant le Théorème de transfert*

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5} \textit{ donc } Var(X) = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2.$$

$$\textit{De même, } \mathbb{E}(Y^2) = \frac{17}{50} \textit{ donc } Var(Y) = \frac{17}{50} - \left(\frac{17}{50}\right)^2.$$

$$\textit{D'où } \rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \times Var(Y)}} \simeq -0,1551.$$

Comme $|\rho_{(X,Y)}| \neq 1$, il n'existe donc pas de relation linéaire entre X et Y.

4 Variables aléatoires à support infini dénombrable

Dans cette partie on ne considère que des variables aléatoires X telles que $X(\Omega)$ est un ensemble infini dénombrable.

4.1 Quelques notions sur les séries numériques

Définition 65 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme partielle*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

et on appelle série de terme général x_n la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 66 *S_n est aussi appelée somme partielle de la série de terme général x_n.*

Définitions 67 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de terme général x_n.*

- *Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie S, on dit que la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on note*

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k.$$

- *Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$ ou si elle n'admet pas de limite, on dit que la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.*

Exemples 68 *(à connaitre)*

1. *Séries géométriques : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = x_0 \times q^n$ et on définit la série géométrique*
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} x_0 \times q^k = x_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
Si $|q| < 1$ alors la série converge vers
$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k = x_0 \times \frac{1}{1-q}.$$
2. *Série exponentielle : on admettra le résultat*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

4.2 Espérance, variance et écart type

Remarque 69 *Rappelons que la loi d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans un ensemble infini dénombrable $X(\Omega)$ est donnée comme dans le cas où $X(\Omega)$ est fini par l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}(X = x), x \in X(\Omega)$.*

Définition 70 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_0, x_1, ...\}$ infini dénombrable. Si la série de terme général $|x_k|\mathbb{P}(X = x_k)$ converge, on appelle espérance mathématique de X le réel*
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

Théorème 71 *(Théorème de transfert) Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_0, x_1, ...\}$ infini dénombrable et $\varphi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. Si la série de terme général $|\varphi(x_k)|\mathbb{P}(X = x_k)$ converge, alors*
$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(x_k)\mathbb{P}(X = x_k).$$

Définitions 72 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur Ω avec $X(\Omega)$ infini dénombrable. Si $\mathbb{E}(X)$ existe alors*

- *On appelle variance de X le réel $Var(X) = \mathbb{E}\Big(\big[X - \mathbb{E}(X)\big]^2\Big)$.*
- *On appelle écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.*

4.3 Lois usuelles

4.3.1 Loi géométrique

Expérience modèle : On lance un dé (supposé non truqué) jusqu'à l'obtention de la valeur 6. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de lancers nécessaires. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}.$$

Définition 73 *On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la* loi géométrique *de paramètre $p \in]0,1]$ si $Im(X) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On note alors $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Remarque 74 *Par définition d'une probabilité on doit avoir $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$. Notons que si $p \in]0,1]$, alors $(1-p) \in [0,1[$ et on a bien*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1 \text{ car } |1-p| < 1.$$

Proposition 75 *Soit $p \in]0,1]$. Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ alors $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$ existent et*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple 76 *On lance un dé (supposé non truqué) jusqu'à l'obtention de la valeur 6. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de lancers nécessaires. Alors $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $E(X) = \frac{1}{6}$. De plus,*

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(X = 1) & = & \frac{1}{6} \\
\mathbb{P}(X = 2) & = & \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \\
\mathbb{P}(X = 3) & = & (\frac{5}{6})^2 \times \frac{1}{6} \\
\mathbb{P}(X \geqslant 50) & = & 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 49) = 1 - \sum_{k=1}^{49} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = 1 - \frac{1-(\frac{5}{6})^{49}}{1-\frac{5}{6}}.
\end{array}$$

4.3.2 Loi de Poisson

Expérience modèle : La loi de Poisson permet de modéliser des phénomènes du type « files d'attente ». La variable aléatoire X est alors par exemple le nombre de clients servis pendant un délai fixé.

Définition 77 *On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la* loi de Poisson *de paramètre $\lambda > 0$ si $Im(X) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note alors $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Remarque 78 *On a bien $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$. En effet,*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{=e^{\lambda}} = 1.$$

Proposition 79 *Soit $\lambda > 0$. Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$ existent et*

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \text{ et } Var(X) = \lambda.$$

Proposition 80 *Soient $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et X, Y deux variables aléatoires telles que $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$. Si X et Y sont indépendantes alors $X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda + \mu)$.*

Preuve. Soient $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et X, Y deux variables aléatoires telles que $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$. On a $\text{Im}(X+Y) = \mathbb{N}$. Fixons $k \in \mathbb{N}$ et notons A_ℓ l'évènement $[Y = \ell]$ avec $\ell \in \{0, ..., k\}$. Comme $(A_1, ..., A_k)$ forme un système complet d'évènements, on obtient d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}\big(X + Y = k | Y = \ell\big) \times \mathbb{P}(Y = \ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}\big(X = k - \ell | Y = \ell\big) \times \mathbb{P}(Y = \ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}\big(X = k - \ell) \times \mathbb{P}(Y = \ell\big) \text{ car } X \perp Y \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \times e^{-\mu} \frac{\mu^\ell}{\ell!} \\
&= e^{-\lambda} e^{-\mu} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \times \frac{\mu^\ell}{\ell!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{(k-\ell)!\ell!} \times \lambda^{k-\ell} \mu^\ell \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \lambda^{k-\ell} \mu^\ell \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k.
\end{aligned}$$

On reconnait bien la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. ■

5 Lois usuelles : récapitulatif

Loi de X	$\mathrm{Im}(X)$	$\mathbb{P}(X=k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
Uniforme $\mathscr{U}(n)$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\{1, \dots, n\}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ $p \in [0,1]$	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X=1)=p$ **et** $\mathbb{P}(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $p \in [0,1]$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Hypergéométrique $\mathscr{H}(N,n,p)$ $p \in [0,1]$, $N, n, Np \in \mathbb{N}^*$ **et** $N \geqslant n$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\dfrac{\dbinom{Np}{k}\dbinom{N(1-p)}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$	np	$np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$
Géométrique $\mathscr{G}(p)$ $p \in]0,1]$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ