Université d'Aix-Marseille | Licence de Mathématiques
Semestre 1 | 2013-2014

Introduction en analyse

Partiel 2 – 28 Novembre 2014

Calculette et documents non autorisés | Durée : 2 heures

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

2. $4\sin^2 x - 8\sin x - 5 = 0$ (on pourra commencer par résoudre l'équation $4X^2 - 8X - 5 = 0$).

Exercice 2

Soient les fonctions réelles f et g définies par $f(x) = \ln(2x+1) + \ln(x-3)$ et $g(x) = \ln(x+5)$.
Préciser leur domaine de définition, puis donner les coordonnées des points d'intersection de leur courbe, s'il en existe.

Exercice 3

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln\left(\frac{2\arctan(x)}{\pi}\right)$.

1. Donner son domaine de définition D.

2. Donner sa dérivée.

3. Dresser son tableau de variation en justifiant toutes les limites. En déduire son ensemble image I.

4. Soit $g\ : D \to I$ telle que $g(x) = f(x)$, pour tout x dans D.
Montrer que g est bijective et donner une expression de sa fonction réciproque avec ses ensembles de départ et d'arrivée ; puis donner sa dérivée.

Exercice 4

1. Donner les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction arccos.

2. En déduire l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \arccos(3x) - 2\arccos(\sqrt{2}x)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.

Exercice 5

1. Soit la fonction rélle $u(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}$. Donner son domaine de définition et sa dérivée.

2. En déduire le domaine de définition et la dérivée de la fonction rélle $f(x) = \sin(u(x))$.

3. Justifier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\pi}^{0} \frac{x\cos(\sqrt{\pi^2 - x^2})}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}dx$; puis la calculer.