Correction Partiel 1 - Analyse 1

Exercice 1.

1. On dit que la suite de nombre réels (u_n) admet l pour limite lorsque, pour tout intervalle centré en l, aussi petit soit-il, la suite (u_n) appartient à cet intervalle à partir d'un certain rang. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

2. La suite (u_n) est majorée par M lorsqu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

3. Soit (u_n) une suite réelle convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Posons $\varepsilon = 1$. D'après la définition de la convergence d'une suite, il existe un certain rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq 1.$$

C'est-à-dire que pour tout $n \geq N$, $u_n \in [l-1, l+1]$, donc pour $n \geq N$, $u_n \leq 1 + l$.
Il faut maintenant traiter les termes de la suite dont le rang est inférieur à N. Posons $A := \max\{u_0, u_1, \ldots, u_N\}$. Pour $0 \leq n \leq N$, on a $u_n \leq A$.
En regroupant les deux informations, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \max\{l+1, A\}$$

4. La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ est une suite majorée (par 1) mais ne converge pas. En effet, les suites extraites : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent pour limite, respectivement 1 et -1. Ces deux limites sont différentes, donc la suite (u_n) ne converge pas.

Exercice 2.

1. Le calcul donne :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2*0+1}{4*0+3} u_0 = \frac{1}{3}, \\ u_2 &= \frac{2*1+1}{4*1+3} u_1 = \frac{3}{7}\frac{1}{3} = \frac{1}{7}, \\ u_3 &= \frac{2*2+1}{4*2+3} u_2 = \frac{5}{11}\frac{1}{7} = \frac{5}{77}. \end{aligned}$$

2. Initialisation : $0 \leq u_0 = 1 \leq \frac{1}{2^0}$.
Hérédité : Soit $n \geq 0$. On suppose que la propriété à démontrer est vraie au rang n : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$. Puisque, par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 0$ et que $\frac{2n+1}{4n+3} \geq 0$, on a : $u_{n+1} \geq 0$. De plus, on remarque que : $\frac{2n+1}{4n+3} \leq \frac{2n+\frac{3}{2}}{4n+3} = \frac{1}{2}$. Ainsi, par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} = \frac{2n+1}{4n+3} u_n \leq \frac{1}{2} u_n \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$.
Conclusion : la propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel.

3. Initialisation : $0 \leq 2^0 = 1$.

   Hérédité : Soit $n \geq 0$. On suppose que la propriété à démontrer est vraie au rang n : $n \leq 2^n$. On a très simplement : $n+1 = n + 2^0 \leq n + 2^n$, puis en utilisant l'hypothèse de récurrence : $n+1 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

   Conclusion : la propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel.

4. Soit $\varepsilon > 0$. On fixe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon$: prenons par exemple $N_\varepsilon = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$. D'après les questions 2. et 3., pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\varepsilon$:

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} = \frac{1}{E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1} \leq \varepsilon.$$

   On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - 0| \leq \varepsilon$. Ceci prouve que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 3. 1. On connait les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sin(0\pi/3) = 0,\\
&\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2,\\
&\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2,\\
&\sin(3\pi/3) = 0,\\
&\sin(4\pi/3) = -\sqrt{3}/2,\\
&\sin(5\pi/3) = -\sqrt{3}/2,\\
&\sin(6\pi/3) = 0,
\end{aligned}$$

   On notera que la suite $(\sin(n\pi/3))$ a une période de 6.

2. Fixons $\varepsilon > 0$. On choisit encore un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon$: prenons par exemple $N_\varepsilon = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$. On a alors pour tout $n \geq N_\varepsilon > 0$:

$$|\frac{n+1}{n} - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

   On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_ε à partir duquel la suite $(\frac{n+1}{n})$ vérifie : $|\frac{n+1}{n} - 1| \leq \varepsilon$. Ceci prouve donc la convergence de cette suite vers 1.

3. D'après la question 1., la suite $(\sin(n\pi/3))$ est 6-périodique et vérifie pour $n = 1$: $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\sin((1+6k)\pi/3) = \sqrt{3}/2$. La fonction suivante : $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 6n+1$ est strictement croissante et permet donc de définir une suite extraite $(u_{\phi(n)})$. Celle-ci est stationnaire et égale à $\sqrt{3}/2$. La suite extraite $(u_{\phi(n)})$ converge donc vers $\sqrt{3}/2$. On pouvait aussi proposer l'extractrice $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 6n + 2$.