Exercice 1

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq n^2$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$

3) $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A : \forall n \in A,\ a \leq n.$

Exercice 2

$A_1 \Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$

$A_2 \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ m \leq f(x) \leq M$

$A_3 \Longleftrightarrow$ non $(\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0)$

$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$

$A_4 \Longleftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Exercice 3

1) Notons A l'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ »

Non(A) s'écrit alors « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$ »

L'assertion Non(A) est vraie car $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -x : x + y = x - x = 0 \leq 0$

De fait, A est Fausse.

2) Notons B l'assertion « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ »

Non(B) s'écrit alors « $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$ »

Non(B) est vraie, il suffit de prendre $x = y = -1$. Ainsi, B est Fausse

3) Notons C l'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$ »

Non(C) s'écrit alors « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leq x$ »

Non(C) est Fausse car pour $x = -1$ il n'existe pas de réel y tel que $y^2 \leq -1$.

Ainsi, C est vraie.

Exercice 4

1) $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) > 1$.

2) f est Croissante $\Longleftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

non(f est Croissante) $\Longleftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ et $f(x) > f(y)$

3) f est croissante et positive $\iff \left(\forall x,y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\right)$ et $\left(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\right)$

Non (f est croissante et positive) $\iff \left(\exists x,y \in \mathbb{R} : x \leq y \text{ et } f(x) > f(y)\right)$ ou $\left(\exists x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\right)$

4) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) > 0.$

5) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : x < y$ et $f(x) \leq f(y)$

6) $\exists !\, x \in \mathbb{R}_+ : \sqrt{x+1} = 3.$

Exercice 5

On considère l'assertion $\mathcal{A}$: « $\forall x,y \in \mathbb{R}_+,\ x \leq y \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$ ».

- Montrons l'assertion $\mathcal{A}$ sans utiliser la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$

Fixons $x,y \in \mathbb{R}_+$. On a $x \leq y \Rightarrow x \times x \leq x \times y \Rightarrow x^2 \leq xy$ (*)

et $x \leq y \Rightarrow x \times y \leq y \times y \Rightarrow xy \leq y^2$ (**)

Finalement, en utilisant (*) et (**) on en déduit que $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$.

- La contraposée de $\mathcal{A}$ s'écrit : $\forall x,y \in \mathbb{R}_+$, non $(0 \leq x^2 \leq y^2) \Rightarrow$ non $(x \leq y)$

Notons que $0 \leq x^2 \leq y^2$ signifie que $0 \leq x^2$ et $x^2 \leq y^2$.

Ainsi non $(0 \leq x^2 \leq y^2)$ s'écrit $(x^2 < 0$ ou $x^2 > y^2.)$

La contraposée de $\mathcal{A}$ est donc : $\forall x,y \in \mathbb{R}_+,\ (x^2 < 0 \text{ ou } x^2 > y^2) \Rightarrow x > y.$

- La réciproque de $\mathcal{A}$ s'écrit : $\forall x,y \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq x^2 \leq y^2 \Rightarrow x \leq y.$

La réciproque de $\mathcal{A}$ est vraie car x et y sont dans $\mathbb{R}_+$.

Montrons que la réciproque est vraie en utilisant sa contraposée :

$\forall x,y \in \mathbb{R}_+,\ x > y \Rightarrow (x^2 < 0 \text{ ou } x^2 > y^2)$

Pour tout $x,y \in \mathbb{R}^+$, $x > y \Rightarrow xx > xy$ et $xy > yy$

$\Rightarrow x^2 > xy$ et $xy > y^2$

$\Rightarrow x^2 > y^2$

$\Rightarrow (x^2 < 0$ ou $x^2 > y^2)$

Ainsi la contraposée de la réciproque est vraie ce qui prouve que la réciproque est vraie.