L1 MCPI 2019-2020

Analyse et probabilités

PLANCHE 2

Développements limités

Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.

Exercice 1. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a les relations suivantes :

1. $\dfrac{2}{x(x+1)} = O(\dfrac{1}{x^2})$.
2. $\dfrac{2}{x} = O(x)$.
3. $x^2 + \sin(x) = O(x^2)$.

Exercice 2. Ordonner les fonctions suivantes définies sur $]0,+\infty[$ selon la relation de comparaison petit o au voisinage de $+\infty$:

$$f_1 : x \mapsto x^2 e^x,\ f_2 : x \mapsto x + x^2,\ f_3 : x \mapsto \frac{x^2}{\ln(x)} \text{ et } f_4 : x \mapsto \frac{e^x}{x\ln(x)}.$$

Exercice 3. Soient f, g, φ et ψ des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto x^3 + 1,\ g : x \mapsto x^4 + 1, \varphi : x \mapsto x^3 - 3x \text{ et } \psi : x \mapsto x^3.$$

1. Montrer que $f \sim g$ en 0.
2. Montrer que $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont définies sur $]-1,\infty[$ et que $\ln(f) \not\sim \ln(g)$ en 0.
3. Montrer que $\varphi \sim \psi$ en $+\infty$.
4. Montrer que $e^\varphi \not\sim e^\psi$ en $+\infty$.

Exercice 4. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g deux fonctions définies dans un voisinage ϑ de a. Montrer que si g ne s'annule pas sur ϑ (sauf éventuellement en a) alors

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exercice 5. Soient $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ deux fonctions telles que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que $\ln(f(x)) \underset{+\infty}{\sim} \ln(g(x))$.

Exercice 6.

1. Donner le DL en 0 à l'ordre 2 des fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \cos(x),\ g :\ x \mapsto e^{-x},\ h : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

2. En déduire le DL en 0 à l'ordre 2 des fonctions $f+g$, $f \times g$, $h + \varphi$, $h \times \varphi$ et $\varphi \times f$.

Exercice 7.

1. Donner le DL en 0 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto e^{2x-x^2}$.
2. En déduire le DL en 0 à l'ordre 2 des fonctions $4f$, f^2 et f^3.

Exercice 8.

1. Donner le DL en 1 à l'ordre 2 de la fonction $g : x \mapsto x^3 - 9\sqrt{x} + 14x + 3$.
2. Donner le DL en 2 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
3. Donner le DL en -1 à l'ordre 6 du polynôme $P : x \mapsto x^4 - 1$. Peut-on avoir une expression exacte du reste de ce DL ?

Exercice 9.

1. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \sin(2x) - \tan(x)$.
2. En déduire le DL en 0 à l'ordre 2 de $g : x \mapsto \dfrac{\sin(2x) - \tan(x)}{x}$.

Exercice 10. Pour chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto e^x - \frac{1}{1+x}, \quad g : x \mapsto x\cos(2x) \text{ et } h : x \mapsto \cos(x)\sin(2x),$$

donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en 0 puis déterminer la position de la tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

Exercice 11. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

Exercice 12. Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que f admet un DL en un point a à l'ordre n si et seulement si $g : x \mapsto f(x+a)$ admet un DL en 0 à l'ordre n.

♣ **Exercice 13.**

1. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto \sqrt{1 + 2\cos(x)}$.
2. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $\varphi : x \mapsto \exp(\sqrt{1 + 2\cos(x)})$.
3. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $h : x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$.

♣ **Exercice 14.**

1. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $\varphi : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$.
2. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$.
3. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $g : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
4. En déduire le DL en 0 à l'ordre 3 de $f + g$, $f \times g$, $f + \varphi$, et $f \times \varphi$.

♣ **Exercice 15.**

1. Calculer la limite de $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)}$ lorsque x tend vers 1.
2. Calculer la limite de $\dfrac{\ln(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2}$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.
3. Calculer la limite de $\dfrac{2\tan(x) - \tan(2x)}{x\sin^2(x)}$ lorsque x tend vers 0.