L1 MCPI 2019-2020

Analyse et probabilités

Planche 3

Intégrale de Riemann

Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.

Exercice 1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en un point $x_0 \in I$. Montrer que si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage ϑ de x_0 tel que pour tout x dans ϑ, $f(x) \neq 0$.
Indication : Supposer $f(x_0) > 0$ et écrire la définition de la continuité de f en x_0 pour $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$.

Exercice 2. On considère la fonction
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$

1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, x \leqslant y \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y - x}$.
2. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur I.

1. Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I.
2. Supposons que I est un segment. Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est seulement continue sur $\mathbb{R}$ alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I.

Exercice 4. On considère $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in]0, 1]$. Le but de cet exercice est de montrer que$f$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion « f n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$. »
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \alpha$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in]0, 1]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant n$.
4. Déduire de ce qui précède que f n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

Exercice 5. On considère $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. Le but de cet exercice est de montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Fixons $\epsilon > 0$.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs la convergence de $f(x)$ vers ℓ lorsque $x \to +\infty$ pour $\frac{\epsilon}{3} > 0$.
2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x, y \in [A, +\infty[$, $|f(x) - f(y)| < \frac{2\epsilon}{3}$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in [0, A], |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $|x - y| < \alpha$. Montrer que si $x \leqslant A \leqslant y$ alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
5. Déduire de ce qui précède que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|a - b| \leqslant 1 \Rightarrow |a| \leqslant 1 + |b|$.
2. Écrire la définition de l'uniforme continuité de f pour $\epsilon = 1$.
3. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)| < 1 + |f(0)|$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(n\delta)| \leqslant n + |f(0)|$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, justifier qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\delta \leqslant x < (n+1)\delta$ et en déduire que
$$|f(x)| \leqslant n + 1 + |f(0)|.$$
6. Déduire de ce qui précède qu'il existe $A, B \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leqslant Ax + B$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit la subdivision régulière de $[0,1]$ suivante
$$\sigma = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$$
et les fonctions $\varphi_n, \psi_n \in \mathscr{E}([0,1])$ définies par
$$\begin{cases} \varphi_n(x) = \dfrac{i}{n} \text{ et } \psi_n(x) = \dfrac{i+1}{n} \quad \text{si} \quad x \in \left[\dfrac{i}{n}, \dfrac{i+1}{n}\right[\quad (0 \leqslant i \leqslant n-1) \\ \varphi_n(1) = 1 \text{ et } \psi_n(1) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi_n(x) \leqslant x \leqslant \psi_n(x)$.
3. Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \psi_n(x)dx$.
4. Déduire de ce qui précède que $x \mapsto x$ est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

Exercice 8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Montrer que si $f \in \mathscr{R}([a,b])$ alors f est bornée sur $[a,b]$.

Exercice 9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $\varphi, \psi, f \in \mathscr{E}([a,b])$.

1. Montrer que si f s'annule sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$.
2. En déduire que si φ et ψ diffèrent en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors
$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \psi(x)dx.$$
3. Que peut-on dire de la réciproque de la question $1.$?

Exercice 10. On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2, \forall x \in [0,1]$. Le but de cet exercice est de montrer que $f \in \mathscr{R}([0,1])$ et de calculer son intégrale. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit la subdivision régulière de $[0,1]$ suivante
$$\sigma = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$$
et les fonctions $\varphi_n, \psi_n \in \mathscr{E}([0,1])$ définies par
$$\varphi_n(x) = \frac{(i-1)^2}{n^2} \text{ et } \psi_n(x) = \frac{i^2}{n^2} \text{ si } x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[\text{ et } \varphi_n(1) = \psi_n(1) = 1.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Déterminer $\int_0^1 \varphi_n(x)dx$ et $\int_0^1 \psi_n(x)dx$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$.
4. En déduire que f est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$.

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathscr{E}([-1,1])$ et la subdivision régulière de $[-1,1]$ suivante

$$\sigma = \Big(-1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{i}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{i}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\Big).$$

1. Montrer que si φ est paire alors $\displaystyle\int_{-1}^1 \varphi(x)dx = 2\int_0^1 \varphi(x)dx$.
2. Montrer que si φ est impaire alors $\displaystyle\int_{-1}^1 \varphi(x)dx = 0$.

Exercice 12. On considère la fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. h est-elle continue sur $[0,1]$?
2. h est-elle monotone sur $[0,1]$?
3. Soit $0 < \epsilon < 1$ fixé.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([\epsilon,1])$ telles que
   $$\forall x \in [\epsilon,1], \varphi(x) \leqslant h(x) \leqslant \psi(x) \text{ et } \int_\epsilon^1 (\psi-\varphi)(x)dx \leqslant \epsilon.$$
   (b) Montrer qu'il existe $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \mathscr{E}([0,1])$ égales respectivement à φ et ψ sur $[\epsilon,1]$ et telles que
   $$\forall x \in [0,1], \tilde{\varphi}(x) \leqslant h(x) \leqslant \tilde{\psi}(x) \text{ et } \int_0^1 (\tilde{\psi}-\tilde{\varphi})(x)dx \leqslant 3\epsilon.$$
   (c) Peut-on déduire de ce qui précède que $h \in \mathscr{R}([0,1])$?

Exercice 13. Déterminer la limite de chacune des sommes de Riemann suivantes

- $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n}$
- $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}$
- $w_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k}{n}\right)$
- $x_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
- $y_n = n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$.

Exercice 14. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et φ une fonction continue sur $[a,b]$.

1. Montrer que si $\varphi \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = 0$ alors $\varphi(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$.
   *Indication : on pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $\varphi(x_0) > 0$ et utiliser la Proposition 13 démontrée dans l'**Exercice** 1.*
2. Le résultat reste-t-il vrai si au lieu d'être continue, φ est seulement dans $\mathscr{R}([a,b])$?

Exercice 15. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^b g(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la Proposition 44.

Exercice 16. Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$ et $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$, $\forall x \in [0, 1]$. On souhaite montrer que la fonction f admet un point fixe dans $[0, 1]$ c'est à dire

$$\exists x_0 \in [0, 1] : f(x_0) = x_0. \quad (\star)$$

On va raisonner par l'absurde en supposant que $\forall x \in [0, 1], f(x) \neq x$.

1. Montrer que g est de signe constant sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\int_0^1 g(x)dx$.
3. Utiliser la Proposition 44 pour arriver à une contradiction.

Exercice 17. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les égalités suivantes sont-elles vraies ? Si oui les démontrer, sinon, trouver un contre-exemple.

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2 dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$.
2. $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.
3. Si de plus $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(x)}dx = \sqrt{\int_a^b f(x)dx}$.

Exercice 18. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c \in]a, b[$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dans $\mathscr{R}([a, c]) \cap \mathscr{R}([c, b])$. Fixons $\epsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe $\varphi_\epsilon, \psi_\epsilon \in \mathscr{E}([a, c])$ et $\tilde{\varphi}_\epsilon, \tilde{\psi}_\epsilon \in \mathscr{E}([c, b])$ telles que

$$\forall x \in [a, c],\ \varphi_\epsilon(x) \leqslant g(x) \leqslant \psi_\epsilon(x) \text{ et } \int_a^c (\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon$$

$$\forall x \in [c, b],\ \tilde{\varphi}_\epsilon(x) \leqslant g(x) \leqslant \tilde{\psi}_\epsilon(x) \text{ et } \int_c^b (\tilde{\psi}_\epsilon - \tilde{\varphi}_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon.$$

2. Montrer que les fonctions $\Phi_\epsilon, \Psi_\epsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies par

$$\Phi_\epsilon(x) = \begin{cases} \varphi_\epsilon(x) & \text{si} \quad x \in [a, c[\\ \tilde{\varphi}_\epsilon(x) & \text{si} \quad x \in [c, b] \end{cases} \quad \text{et} \quad \Psi_\epsilon(x) = \begin{cases} \psi_\epsilon(x) & \text{si} \quad x \in [a, c[\\ \tilde{\psi}_\epsilon(x) & \text{si} \quad x \in [c, b], \end{cases}$$

sont dans $\mathscr{E}([a, b])$ et qu'elles vérifient $\forall x \in [a, b]$, $\Phi_\epsilon(x) \leqslant g(x) \leqslant \Psi_\epsilon(x)$.

3. Déduire de ce qui précède que $g \in \mathscr{R}([a, b])$.

Exercice 19. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$ une subdivision régulière de $[a,b]$ où $\forall i \in \{0, ..., n\}$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On considère les fonctions $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ définies par

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x_i) & \text{si} \quad x_i \leqslant x < x_{i+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1) \\ f(b) & \text{si} \quad x = b \end{cases} \quad \text{et } \psi(x) = \begin{cases} f(a) & \text{si} \quad x = a \\ f(x_{i+1}) & \text{si} \quad x_i < x \leqslant x_{i+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1). \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$.
3. En déduire que $f \in \mathscr{R}([a,b])$.
4. Si f est décroissante sur $[a,b]$, peut-on aussi montrer que $f \in \mathscr{R}([a,b])$?
5. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f(x_i), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant u_n \leqslant \int_a^b f(x)dx + \frac{b-a}{n} f(b).$$

   (b) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

   (c) Quel résultat connu vient-on de prouver ?

Exercice 20. On considère $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. En utilisant le théorème de la moyenne, déterminer la limite suivante

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt.$$

Exercice 21. En utilisant le théorème de la moyenne, déterminer la limite suivante

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^{x^2} \frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t} dt.$$

Indication : Pour $x \in]0,1]$ fixé, on pourra considérer les fonctions $f : [x^2, x] \to \mathbb{R}$ et $g : [x^2, x] \to \mathbb{R}$ définies par $f : t \mapsto \frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t}$ et $g : t \mapsto 1$.

Exercice 22. Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux, positives et telles que $\forall x \in [0,1]$, $f(x)g(x) \geqslant 1$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \times \left(\int_0^1 g(x)dx\right) \geqslant 1.$$

Indication : peut-on utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

Exercice 23. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

f admet-elle des primitives sur $\mathbb{R}$?
Indication : on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exercice 24. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$. On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \int_0^1 x^n g(x)dx, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Indication : quelle propriété vérifie une fonction continue sur un segment ?

Exercice 25. (Inégalité de Poincaré)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(a) = 0$.

1. Montrer que

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

2. Si on suppose de plus que $f(b) = 0$, montrer que

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

   Indication : $[a,b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$.

3. Si on suppose encore que $f(b) = 0$ et en posant $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, établir l'inégalité

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

Exercice 26. (Lemme de Gronwall)

Soient $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On fixe $t_0 > 0$. On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \geqslant t_0,\ \phi(t) \leqslant K + \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds. \quad (\star)$$

On définit $f : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{K + \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds}{\exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right)}$, $\forall t \in [t_0, +\infty[$.

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$,

$$f'(t) = \psi(t)\frac{\phi(t) - K - \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds}{\exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right)}.$$

3. En déduire que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $f(t) \leqslant K$.
4. En utilisant $(\star)$, montrer finalement que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$,

$$\phi(t) \leqslant K \exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right). \quad (\star\star)$$

♣ **Exercice 27.** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La composition $g \circ f$ est-elle uniformément continue ?

♣ **Exercice 28.** Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique et continue, alors f est uniformément continue.

♣ **Exercice 29.** Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique et continue par morceaux, alors f est bornée.

♣ **Exercice 30.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que l'on peut généraliser le résultat trouvé à l'Exercice 6 de la façon suivante :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant A|x| + B.$$

♣ **Exercice 31.** Soit $f \in \mathscr{R}([-1,1])$. Que peut-on dire de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ si f est paire ? Si f est impaire ? On pourra utiliser l'exercice 11.

♣ **Exercice 32.** On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{x} - E\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \in]0,1] \end{cases}$$

où $E\left(\frac{1}{x}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{1}{x}$. Montrer que $f \in \mathscr{R}([0,1])$.

♣ **Exercice 33.** Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1], \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases} \end{aligned}$$

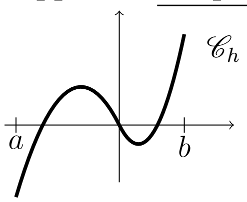
n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

♣ **Exercice 34.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $h \in \mathscr{R}([a,b])$. On introduit les fonctions

$$h^+(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad h(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad h(x) < 0. \end{cases} \quad \text{et } h^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h(x) > 0 \\ -h(x) & \text{si} \quad h(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

appelées respectivement parties positives et négatives de h.

1. Supposons uniquement pour cette question que h possède l'allure suivante :



Dessiner les courbes représentatives de h^+, h^- et $|h|$ sur $[a,b]$.

2. Pour tout x dans $[a,b]$, écrire $h(x)$ en fonction $h^+(x)$ et $h^-(x)$.
3. Pour tout x dans $[a,b]$, écrire $|h(x)|$ en fonction $h^+(x)$ et $h^-(x)$.

4. Soient $u, U : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions vérifiant $u \leqslant h \leqslant U$. Vérifier que pour tout x dans $[a,b]$

$$u^+(x) \leqslant h^+(x) \leqslant U^+(x), \quad U^-(x) \leqslant h^-(x) \leqslant u^-(x),$$

$$U^+(x) - u^+(x) \leqslant U(x) - u(x) \text{ et } u^-(x) - U^-(x) \leqslant U(x) - u(x),$$

où u^+ et U^+ (resp. u^- et U^-) sont les parties positives (resp. négatives) de u et U.

5. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Montrer qu'il existe $u_\epsilon, U_\epsilon \in \mathscr{E}([a,b])$ telles que

$$u_\epsilon \leqslant h \leqslant U_\epsilon, \int_a^b (U_\epsilon^+ - u_\epsilon^+)(t)dt \leqslant \epsilon \text{ et } \int_a^b (u_\epsilon^- - U_\epsilon^-)(t)dt \leqslant \epsilon.$$

6. Déduire de ce qui précède que $|h| \in \mathscr{R}([a,b])$.

7. Montrer que $-|h| \leqslant h \leqslant |h|$. En déduire l'inégalité $\left|\int_a^b h(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |h(x)|dx.$

♣ **Exercice 35.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathscr{R}([a,b])$ et $g \in \mathscr{R}([a,b])$. Le but de cet exercice est de montrer que $f \times g \in \mathscr{R}([a,b])$.

1. Supposons dans un premier temps que $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$ et fixons $\epsilon > 0$.
   (a) Justifier qu'il existe $M, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $f \leqslant M$ et $g \leqslant \beta$.
   (b) Justifier qu'il existe φ_ϵ, ψ_ϵ, u_ϵ et U_ϵ dans $\mathscr{E}([a,b])$ tels que

   $$\varphi_\epsilon \leqslant f \leqslant \psi_\epsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon$$

   $$u_\epsilon \leqslant g \leqslant U_\epsilon \text{ et } \int_a^b (U_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon.$$

   (c) Notons $\xi_\epsilon = \min\{M, \psi_\epsilon\}$ et $\theta_\epsilon = \min\{\beta, U_\epsilon\}$. Montrer que ξ_ϵ, θ_ϵ et les parties positives $(\varphi_\epsilon)^+$, $(u_\epsilon)^+$ sont dans $\mathscr{E}([a,b])$ et vérifient

   $$0 \leqslant (\varphi_\epsilon)^+ \leqslant f \leqslant \xi_\epsilon \leqslant M \qquad 0 \leqslant (u_\epsilon)^+ \leqslant g \leqslant \theta_\epsilon \leqslant \beta \quad \text{ et } \quad (\varphi_\epsilon)^+ \times (u_\epsilon)^+ \leqslant fg \leqslant \xi_\epsilon \times \theta_\epsilon.$$

   (d) Justifier que $(\varphi_\epsilon)^+ \times (u_\epsilon)^+$ et $\xi_\epsilon \times \theta_\epsilon$ sont dans $\mathscr{E}([a,b])$.
   (e) Montrer que

   $$\int_a^b \left(\xi_\epsilon \times \theta_\epsilon - (\varphi_\epsilon)^+ \times (u_\epsilon)^+\right)(x)dx \leqslant (M + \beta)\epsilon,$$

   et en déduire que $f \times g \in \mathscr{R}([a,b])$.

2. Supposons à présent que f et g sont de signes quelconques sur $[a,b]$.
   (a) Justifier qu'il existe $m, M, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $m \leqslant f \leqslant M$ et $\alpha \leqslant g \leqslant \beta$.
   (b) Justifier que la fonction $x \mapsto (f(x) - m)(g(x) - \alpha)$ appartient à $\mathscr{R}([a,b])$.
   (c) En déduire que $f \times g \in \mathscr{R}([a,b])$.

♣ **Exercice 36.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et f une fonction de $\mathscr{R}([a,b])$. On suppose qu'il existe $0 < m < M$ tels que $\forall x \in [a,b], m \leqslant f(x) \leqslant M$. Fixons $\epsilon > 0$.

1. (a) Justifier qu'il existe φ_ϵ et ψ_ϵ dans $\mathscr{E}([a,b])$ telles que

$$\varphi_\epsilon \leqslant f \leqslant \psi_\epsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon$$

   (b) Notons $u_\epsilon = \max\{m, \varphi_\epsilon\}$ et $U_\epsilon = \min\{M, \psi_\epsilon\}$ les fonctions définies sur $[a,b]$ par

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} m & \text{si } \varphi_\epsilon(x) \leqslant m \\ \varphi_\epsilon(x) & \text{si } \varphi_\epsilon(x) \geqslant m \end{cases} \quad \text{et} \quad U_\epsilon(x) = \begin{cases} \psi_\epsilon(x) & \text{si } \psi_\epsilon(x) \leqslant M \\ M & \text{si } \psi_\epsilon(x) \geqslant M. \end{cases}$$

   Justifier que $u_\epsilon, U_\epsilon \in \mathscr{E}([a,b])$.

   (c) Montrer que $\forall x \in [a,b]$, $m \leqslant u_\epsilon(x) \leqslant f(x) \leqslant U_\epsilon(x) \leqslant M$.

   (d) Montrer que $\int_a^b (U_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon$.

   (e) Justifier que $\dfrac{1}{U_\epsilon}$ et $\dfrac{1}{u_\epsilon}$ sont dans $\mathscr{E}([a,b])$ et montrer que

$$\frac{1}{U_\epsilon} \leqslant \frac{1}{f} \leqslant \frac{1}{u_\epsilon} \text{ et } \int_a^b \left(\frac{1}{u_\epsilon} - \frac{1}{U_\epsilon}\right)(x)dx \leqslant \frac{\epsilon}{(mM)^2}.$$

   (f) En déduire que $\dfrac{1}{f} \in \mathscr{R}([a,b])$.

2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, trouver un minorant du produit

$$A = \int_a^b f(x)dx \times \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx.$$

3. Ce minorant peut-il être atteint ?