L1 MCPI 2019-2020

Analyse et Probabilités

PLANCHE 4

Introduction à l'analyse combinatoire

Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que que la somme des n premiers entiers impairs est égale à n^2. <u>En déduire</u> que la somme des n premiers entiers est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2. Soient E, F deux ensembles finis tels que $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ et $f : E \to F$ une application. On considère les assertions suivantes :

(i) f est injective.

(ii) f est surjective.

(iii) f est bijective.

Montrer que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, x_1 ..., x_n \in [0,1]$. En utilisant le Lemme des tiroirs, montrer qu'il existe $x_i, x_j \in \{x_0, x_1 ..., x_n\}$ tels que $|x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{n}$.

Exercice 4. Soient A un ensemble fini et $B \subset A$ un sous-ensemble de A. Montrer que si $\text{Card}(B) = \text{Card}(A)$. Alors $A = B$.

Exercice 5. Soient A et B deux ensembles finis. Montrer que

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B).$$

Exercice 6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E, F deux ensembles finis avec $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) = n$.
Notons $\mathscr{B}(E,F) = \{f \in \mathscr{F}(E,F) : f \text{ bijective}\}$ l'ensemble des bijections de E dans E. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que

$$\text{Card}\big(\mathscr{B}(E,F)\big) = n!.$$

Exercice 7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, ..., n\}$. Montrer que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que E possède 2^n sous-ensembles.

Exercice 9. Soient A et B deux ensemble finis. On note $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Déterminer $\text{Card}(A \Delta B)$.

Exercice 10. Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments et $A \subset E$ un ensemble à $p \in \mathbb{N}$ éléments, $p \leqslant n$.
Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un unique élément de A?

Exercice 11. On considère les mains de 5 cartes que l'on obtient en tirant successivement et sans remise 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien il y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien il y a-t-il de mains contenant exactement un as ?
3. Combien il y a-t-il de mains contenant au moins un valet ?
4. Combien il y a-t-il de mains contenant à la fois au moins un roi et au moins une dame ?

Exercice 12. (Formule de Vandermonde) Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$ avec $c \leqslant a + b$. On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires numérotées respectivement $B_1, ..B_a$ et $N_1, ...N_b$. On extrait au hasard et simultanément c boules de cette urne et on regarde le nombre de boules de chaque couleur obtenues.

1. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
2. Soit $k \in \mathbb{N}, k \leqslant a$. Quel est le nombre de tirages possibles contenant k boules blanches ?
3. En déduire la formule de Vandermonde dans le cas où $c \leqslant a$ et $c \leqslant b$
$$\sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}.$$
4. La formule reste-elle vraie si on suppose seulement $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $c \leqslant a + b$?

Exercice 13. On considère un sac de 26 pièces distinctes sur lesquelles sont inscrites les 26 lettres de l'alphabet. On pioche une pièce et note le résultat obtenu, on replace la pièce dans le sac puis on recommence deux fois l'opération. Au final, on obtient un mot de 3 lettres.

1. Combien de mots possibles peut-on former ?
2. Parmi ces mots, combien il y en a-t-il :
   (a) ayant des lettres distinctes ?
   (b) ne comportant que des voyelles ?
   (c) comportant une unique voyelle ?
   (d) comportant au moins une voyelle ?
   (e) étant des palindromes ? *Un palindrome est un mot qui peut se lire indifféremment de droite à gauche ou de gauche à droite comme « kayak » par exemple.*
3. On suppose à présent que deux personnes écrivent chacune un mot de 3 lettres en utilisant la même méthode avec remise que précédemment. On note E l'ensemble des écritures possibles, E_1 l'ensemble des écritures telles que les deux personnes ont composé le même mot et E_2 l'ensemble des écritures qui ne comportent que des voyelles. Déterminer les cardinaux des ensembles suivants : $E,\ E_1,\ E_2,\ E_1 \cup E_2,\ \overline{E}_1 \cup E_2$ et $\overline{E}_1 \cup \overline{E_2}$.

Exercice 14. Un collectionneur de timbres possède 6 timbres français et 8 timbres étrangers. Tous ces timbres sont supposés différents les uns des autres. Ce collectionneur veut remplir une pochette de 4 timbres.

1. Combien il y a-t-il de façons de faire ?
2. Il veut que sa pochette contienne 2 timbres français exactement. Combien il y a-t-il de possibilités ?
3. Il veut que sa pochette contienne au moins 3 timbres français. Combien il y a-t-il de possibilités ?

Exercice 15. On joue au poker avec un jeu de 32 cartes : 4 couleurs et 8 hauteurs et chaque joueur reçoit 5 cartes tirées simultanément du jeu.

1. Combien de mains possibles un joueur peut-il recevoir ?
2. Parmi ces mains, combien comportent exactement :
   (a) un unique as ?
   (b) au moins un as ?
   (c) une quinte flush ? (5 cartes de la même couleur dont les hauteurs se suivent par exemple $9, 10$, valet, dame, roi de trèfle).
   (d) une quinte ? (c'est à dire 5 cartes dont les hauteurs se suivent).
   (e) Exactement 3 reines et 2 valets ?
   (f) un full ? (c'est à dire 3 cartes d'une même hauteur et 2 cartes d'une autre hauteur, par exemple 3 valets et 2 rois ?

Exercice 16. Un joueur tire successivement 12 cartes sans remise d'un jeu de 52 cartes et les pose, face visible, sur une table.

1. Combien de réalisations peut-il observer ?
2. Parmi ces réalisations, combien il y en a-t-il qui comportent exactement :
   (a) 3 piques, 2 coeurs, 4 trèfles, 3 carreaux ?
   (b) Les 4 as ?
   (c) Les 4 as consécutivement ?

Exercice 17. Disposant de roses, de tulipes et de marguerites et souhaitant faire un bouquet de 9 fleurs, combien de compositions différentes peut-on élaborer ?

Exercice 18.

1. Combien il y a-t-il de couples $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n + m = 3$?
2. Combien il y-a-t-il de triplets $(n, p, m) \in \mathbb{N}^3$ tels que $n + p + m = 9$?

♣ **Exercice 19.** Soient $a, b \in \mathbb{N}$ et A, A', B, B' des ensembles finis tels que

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(A') = a \text{ et } \text{Card}(B) = \text{Card}(B') = b.$$

1. Déterminer le nombre de bijections de $A \times B$ sur $A' \times B'$.
2. Supposons maintenant que $\{A, B\}$ et $\{A', B'\}$ forment deux partitions d'un ensemble E, c'est à dire
$$A \cup B = E, A \cap B = \varnothing \text{ et } A' \cup B' = E, A' \cap B' = \varnothing.$$
   (a) Déterminer le nombre de bijections $f : E \to E$.
   (b) Déterminer le nombre de bijections $f : E \to E$ telles que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

♣ **Exercice 20.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On doit placer autour d'une table ronde $2n$ personnes : n hommes et n femmes qui constituent n couples.

1. Combien existe-t-il de dispositions ?
2. Combien existe-t-il de dispositions respectant l'alternance des sexes ?
3. Combien existe-t-il de dispositions qui ne séparent pas les couples ?
4. Combien existe-t-il de dispositions respectant l'alternance des sexes et qui ne séparent pas les couples ?