Chapitre 2 : Limites et fonctions continues

1 Généralités sur les fonctions

Définitions *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$.*

. $f \geqslant g$ *si* $\forall x \in U\ f(x) \geqslant g(x)$.
. $f \geqslant 0$ *si* $\forall x \in U\ f(x) \geqslant 0$.
. $f > 0$ *si* $\forall x \in U\ f(x) > 0$.
. *f est dite constante sur U si* $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in U, f(x) = \alpha$.
. *f est nulle sur U si* $\forall x \in U, f(x) = 0$.
. *f est <u>majorée</u> si* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in U, f(x) \leqslant M$.
. *f est <u>minorée</u> si* $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in U, f(x) \geqslant m$.
. *f est <u>bornée</u> si* $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in U, m \leqslant f(x) \leqslant M$.
(ou de façon équivalente : $\exists A \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in U, |f(x)| \leqslant A$*).*
. *f est <u>paire</u> si* $\forall x \in U, f(-x) = f(x)$.
. *f est <u>impaire</u> si* $\forall x \in U, f(-x) = -f(x)$.
. *f est <u>croissante</u> sur U si* $\forall x, y \in U, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
. *f est <u>strictement croissante</u> sur U si* $\forall x, y \in U, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
. *f est <u>décroissante</u> sur U si* $\forall x, y \in U, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
. *f est <u>strictement décroissante</u> sur U si* $\forall x, y \in U, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
. *f est <u>monotone</u> sur U si f est croissante ou décroissante sur U.*
. *f est <u>strictement monotone</u> sur U si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur U.*

2 Limites

Définitions *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{array}{lcl}
\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell & \Leftrightarrow & \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon. \\
\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow & \forall A > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A. \\
\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow & \forall A > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A. \\
\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell & \Leftrightarrow & \forall \epsilon > 0, \exists B > 0 : \forall x \in I, x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon. \\
\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell & \Leftrightarrow & \forall \epsilon > 0, \exists B > 0 : \forall x \in I, x < -B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon. \\
\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow & \forall A > 0, \exists B > 0 : \forall x \in I, x > B \Rightarrow f(x) > A. \\
\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow & \forall A > 0, \exists B > 0 : \forall x \in I, x > B \Rightarrow f(x) < -A. \\
\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow & \forall A > 0, \exists B > 0 : \forall x \in I, x < -B \Rightarrow f(x) < -A. \\
\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow & \forall A > 0, \exists B > 0 : \forall x \in I, x < -B \Rightarrow f(x) > A. \\
\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell & \Leftrightarrow & \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I,\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon. \\
\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell & \Leftrightarrow & \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I,\ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.
\end{array}$$

Proposition *Si f admet pour limite ℓ en x_0, alors ses limites à droite et à gauche coincident*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Contraposée : Si f admet des limites à droite et à gauche de x_0 différentes, alors elle n'admet pas de limite en x_0.

Proposition *Si une fonction a une limite, alors cette limite est unique.*

Proposition
. *Si $f \leqslant g$, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$ alors $\ell \leqslant \ell'$.*
. *Si $f \leqslant g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.*
. ***Théorème des gendarmes :***

Si $f \leqslant g \leqslant h$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

3 Continuité

Définitions *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*
— *On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si $x_0 \in \overline{I}$ et*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

— *On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*
— *On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si} \quad x \neq x_0 \\ \ell & \textit{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

*Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et s'appelle le **prolongement par continuité** de f en x_0.*

Proposition *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I. Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ f(x) \neq 0.$$

4 Suites et continuité

Proposition *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I. Alors*

f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Définition *(Suite récurrente)*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application. Toute suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné dans } I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

est appelée suite récurrente.

Théorème *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application continue sur I. Si la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné dans } I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est solution dans I de l'équation $f(\ell) = \ell$.

Remarque *Si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans I, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.*

Définition *(Point fixe)*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application. Toute solution dans I de l'équation $f(x) = x$ est appelée point fixe de f.

Définitions *(Applications lipschitziennes et contractantes)*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est k-lipschitzienne sur I s'il existe $k \in]0, +\infty[$ tel que

$$\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

L'application est dite contractante lorsque l'on peut choisir $k \in]0, 1[$.

Proposition *Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ (c'est à dire f et f' sont continues sur $[a, b]$). Alors f est k-lipschitzienne pour*

$$k = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Théorème *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, I un intervalle de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, +\infty[$ et $f : I \to I$ une application contractante. Alors*

1. *f admet un unique point fixe $\ell \in I$.*
2. *Pour tout $u_0 \in I$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence*

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

converge vers ℓ.

5 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème *(Théorème des valeurs intermédiaires)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Corollaire *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.*

$$\boxed{\text{Si } f(a) \times f(b) < 0 \text{ alors il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f(c) = 0.}$$

Corollaire *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Théorème *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors*

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : f([a, b]) = [m, M].$$

Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

6 Fonctions monotones et bijections

Définitions *Soit $f : E \to F$ une fonction où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.*
- *f est **injective** si $\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.*
- *f est **surjective** si $\forall y \in F,\ \exists x \in E : y = f(x)$.*
- *f est **bijective** si elle est injective et surjective c'est à dire si $\forall y \in F,\ \exists! x \in E : y = f(x)$.*

Proposition *Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. La fonction g est appelée bijection réciproque de f et se note f^{-1}.*

Théorème *(Théorème de la bijection)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I alors

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I) = \{f(x), x \in I\}$.*
2. *La fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*