

# Quelques résultats sur la résolution de problèmes avec des coefficients changeant de signe

Patrick Ciarlet

*Laboratoire POEMS, ENSTA Paris,  
Institut Polytechnique de Paris, France*

Dans cet exposé, nous résumons des travaux menés conjointement avec Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Lucas Chesnel et Camille Carvalho, sur la résolution d'EDP avec des coefficients réguliers par morceaux, et qui changent de signe sans passer par 0.

En électromagnétisme, la réponse effective de certains matériaux manufacturés est modélisée par des coefficients négatifs : on les appelle les matériaux "négatifs". Si ceux-ci sont entourés par des matériaux "classiques", le problème global de transmission à résoudre met en jeu des coefficients discontinus, et qui changent de signe. A titre d'exemple, soit  $\sigma$  un paramètre constant par morceaux, strictement positif de valeur  $\sigma^+$  dans une partie du domaine de calcul, et strictement négatif de valeur  $\sigma^-$  dans le reste. On considère le problème source scalaire suivant : trouver  $u$  tel que  $\operatorname{div} \sigma \nabla u - \omega^2 u = f$  complété d'une condition aux limites homogène, où  $f$  est la donnée et  $\omega$  la pulsation. Si on cherche une solution  $u$  de régularité  $H^1$ , on peut établir qu'il existe un intervalle critique tel que le problème source est bien posé (au sens qu'il obéit à l'alternative de Fredholm) si, et seulement si, le rapport  $\sigma^-/\sigma^+$  n'appartient pas à cet intervalle critique [3]. On peut également établir des résultats similaires pour le problème aux valeurs propres associé [5]. Ces résultats sont obtenus à l'aide de l'approche dite de  $T$ -coercivité.

Du point de vue numérique (discrétisation par éléments finis) et lorsque le rapport  $\sigma^-/\sigma^+$  n'appartient pas à l'intervalle critique, la forme de l'interface séparant les deux matériaux doit être prise en considération. Il existe des

règles de maillage simples qui permettent de retrouver les erreurs de convergence usuelles, quelle que soit l'interface, lorsque celle-ci est polygonale. Ces règles reposent sur des transformations géométriques élémentaires d'une région à l'autre du domaine [7, 2].

Enfin, lorsque le rapport  $\sigma^-/\sigma^+$  appartient à l'intervalle critique, c'est-à-dire lorsque le problème n'est pas bien posé dans  $H^1$ , des solutions existent pour résoudre le problème, dans un cadre fonctionnel différent [4, 1, 6].

## Références

- [1] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Carvalho, L. Chesnel, P. Ciarlet, Jr., *On the use of Perfectly Matched Layers at corners for scattering problems with sign-changing coefficients*, J. Comput. Phys., **322**, pp. 224–247 (2016).
- [2] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Carvalho, P. Ciarlet Jr., *Mesh requirements for the finite element approximation of problems with sign-changing coefficients*, Numer. Math., **138**, pp. 801–838, (2018).
- [3] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials*, Math. Mod. Num. Anal., **46**, pp. 1363–1387 (2012).
- [4] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, X. Claeys, *Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial*, Math. Model. Meth. App. Sci., **23**, pp. 1629–1662 (2013).
- [5] C. Carvalho, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *Eigenvalue problems with sign-changing coefficients*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **355**, pp. 671–675 (2017).
- [6] C. Carvalho, P. Ciarlet Jr., *The Singular Complement Method for dielectric-metamaterial transmission problems*, In preparation.
- [7] L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *T-coercivity and continuous Galerkin methods : application to transmission problems with sign changing coefficients*, Numer. Math., **124** (2013), pp. 1–29.