

Introduction en Analyse

PARTIEL 2 - 2 DÉCEMBRE 2016

DURÉE : 2 HEURES. SANS DOCUMENTS NI CALCULATRICES

EXERCICE 1

Soient u et f deux fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} . On note f' la fonction dérivée de f et u' la fonction dérivée de u .

1. Donner la dérivée de la fonction $f \circ u$. On rappelle que $f \circ u(x) = f(u(x))$ pour tout x dans \mathbb{R} .
2. Donner la primitive $F(x)$ de la fonction $v(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 21}}$ telle que $F(0) = 0$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{\cos^2(x)}$.

1. Donner le domaine de définition de f et justifier qu'elle est intégrable sur $[0; \pi/4]$.
2. Montrer qu'une primitive de la fonction \tan est $x \mapsto -\ln(\cos(x))$ sur $[0; \pi/4]$.
3. Montrer que la dérivée de la fonction $\tan(x)$ est la fonction $\frac{1}{\cos^2(x)}$.
4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$.
5. A l'aide de la question (3) donner une primitive de la fonction $g(x) = \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$.
6. En déduire l'aire du plan délimitée par la courbe de g , l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \pi/4$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\pi}{1 + e^x}$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f .
2. Donner les limites de f aux bornes de D_f .
3. Justifier le domaine sur lequel f est dérivable, puis calculer sa dérivée.
4. Etablir le tableau des variations de f .
5. Donner l'ensemble $f(D_f)$.

EXERCICE 4

On considère la fonction $g : [\frac{1}{4}; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos(\pi\sqrt{x})$.

1. Justifier que g est dérivable sur $[\frac{1}{4}; 1]$, puis calculer sa dérivée.
2. Etablir le tableau des variations de g .
3. Soit $f : [\frac{1}{4}; 1] \rightarrow I$ définie par $f(x) = g(x)$ (pour tout $x \in [\frac{1}{4}; 1]$).
Donner un intervalle I tel que f soit bijective.
4. Donner l'application réciproque de f .