Université d'Aix-Marseille | Licence de Mathématiques
Semestre 1 | 2016-2017

Introduction à l'analyse
Planche 1

1 Logique

Exercice 1
Rédiger les négations des phrases suivantes.
1. Tous les lundi, je joue au foot.
2. Quand il fait beau le dimanche, je fais des maths.
3. Tous les lundi, s'il fait beau, je ne fais pas des maths.

Exercice 2
Donner la négation des assertions ci-dessous. Déterminer si ces assertions sont vraies ou fausses.
1. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y>0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y>0.$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2>x.$

Exercice 3
Exprimer les affirmations suivantes en symboles mathématiques :
1. Tout entier naturel est plus petit ou égal à son carré.
2. Si le produit de deux nombres réels est nul, alors un des deux facteurs est nul.
3. Tout ensemble non vide d'entiers naturels contient un plus petit élément.

Exercice 4
Démontrer l'implication $0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$. Ecrire sa contraposée et sa réciproque. Déterminer si sa réciproque est vraie.

Exercice 5
Montrer par récurrence que $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6
Démontrer par récurrence l'inégalité $2^n \geq n^2$, pour tout entier n supérieur ou égal à un entier n_0 qu'on déterminera. A-t-on $2^n \geq n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 7
Soit a un réel. Montrer par contraposée, que si $\forall \varepsilon > 0\ a \leq \varepsilon$, alors $a \leq 0$.

Exercice 8
Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un irrationnel (écrire $\sqrt{2}$ sous forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ et discuter la parité de p et q).

2 Ensembles

Exercice 9
Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer les affirmations suivantes :
1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
5. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Exercice 10
1. Donner une liste de tous les sous-ensembles de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.
2. Montrer par récurrence qu'un ensemble à n éléments possède 2^n sous-ensembles.

Exercice 11
Soit A l'ensemble des diviseurs de 45 et soit B l'ensemble des diviseurs de 165. Déterminer A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice 12
Soient les ensembles $A = [1,4]$, $B = [3,6]$, $C = [2,5]$ et $D = \{2\}$.
1. Tracer dans $\mathbb{R}$ les ensembles suivants : $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus D$.
2. Tracer dans $\mathbb{R}^2$ les ensembles suivants : $(A \cap B) \times A$, $B^c \times (A \cup C)$, $(A \setminus D) \times D$.

Exercice 13
Définir en termes d'intervalles les ensembles suivants :
1. $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq |x+3|\}$,
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2x - 3| > 2x + 1\}$,
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : |x - |x+1|| < 2\}$.

Exercice 14
Soit $[t, \infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geq t\}$. Calculer $A = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} [t, \infty[$ et $B = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} [t, \infty[$.

3 Applications

Exercice 15
On donne $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer $f(\{a, b, c\})$ et $f^{-1}(\{1, 3\})$ pour les applications $f : E \to F$ suivantes :
1. $f(a) = 1,\ f(b) = 3,\ f(c) = 4,\ f(d) = 2$,
2. $f(a) = f(b) = 2,\ f(c) = f(d) = 3$,
3. $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 2$.

Exercice 16
Soit $f\ : E \to F$ une application, et soient A et B deux parties de E.
1. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et trouver un contre-exemple qui montre que l'égalité peut être fausse.
3. Démontrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si f est injective.

Exercice 17
Soit $f\ : E \to F$ une application, et soient C et D deux parties de F.
1. Démontrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
2. Démontrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 18
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer les implications suivantes :
1. f et g injectives $\Rightarrow$ $g \circ f$ est injective.
2. f et g surjectives $\Rightarrow$ $g \circ f$ est surjective.
3. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g est surjective. Peut-on aussi conclure que f est nécessairement surjective ?
4. $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f est injective. Peut-on aussi conclure que g est nécessairement injective ?

Exercice 19
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer : (i) $f([-1, 1])$, (ii) $Im(f)$, (iii) $f^{-1}([0, 1])$, (iv) $f^{-1}(]-\infty, 0])$.
2. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 20
L'application suivante est-elle injective, surjective, bijective ?
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

Exercice 21
1. On considère l'application $f : [-1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = (x+1)^2$. Montrer que f est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.
2. On considère l'application $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Montrer que g est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.
3. On considère l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2 + 2x$. Est-elle injective, surjective, bijective ? Déterminer deux intervalles I et J tels que l'application $\tilde{h} : I \to J$, définie par $\tilde{h}(x) = x^2 + 2x$ soit bijective. Déterminer l'expression de sa réciproque.

Exercice 22
Choisir et représenter graphiquement une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
1. $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
4. $\exists x \in \mathbb{R} : x < f(x)$.

Exercice 23
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire avec les quantificateurs les expressions suivantes.
1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f ne s'annule jamais ;
4. f est croissante.

Exercice 24
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner la négation des énoncés suivants.
Lesquels parmi ces énoncés sont vrais ?
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ tel que $f(x) \leq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.