Introduction à l'analyse
Planche 2

1 Opérations sur les réels, inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 1
Soient a, b et c trois réels tels que $a-b, a-c$ et $b-c$ soient non nuls. Calculer les expressions suivantes

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$\frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Exercice 2
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $I =]a, b[$.
1. Démontrer qu'il existe un nombre réel rationnel $c \in \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$.
2. Démontrer qu'il existe un nombre réel irrationnel $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $a < d < b$.
3. En déduire que les ensembles $I \cap \mathbb{Q}$ et $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sont infinis.

Exercice 3
Démontrer $2xy \leq x^2 + y^2$ et $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$ pour $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exercice 4
Démontrer $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul.

Exercice 5
Démontrer $(1+x)^n \geq 1 + nx$ pour $x \in \mathbb{R}, x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6
Déduire de l'exercice 5) que $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ pour $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

Exercice 7
Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, et soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x_n = \frac{a^n}{n^k}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $b > 1$ tel que $x_{n+1} \geq b x_n$ pour tout n assez grand. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty$.

Exercice 8
1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. Démontrer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que la série géométrique infinie satisfait $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$.

Exercice 9
(Somme télescopique)
1. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
2. Soit n un entier non nul, en déduire une expression simple de $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)}$.

Exercice 10
On désigne par a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Exprimer, sous forme de conditions sur x, en utilisant les valeurs absolues, les relations d'appartenance suivantes

$$x \in [-1, 5];\ x \in]2, 5[;\ x \in [-5, -3];\ x \in]a, b[.$$

Exercice 11
Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ définis par les conditions suivantes sur x $|x-1| \leqslant 4$ puis $|x + |x|| \geqslant 2$.

Exercice 12
Démontrer, en utilisant la définition de la valeur absolue :
a) $|x+y| \geq ||x|-|y||$ pour $x, y \in \mathbb{R}$,
b) $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ pour $x, y \in \mathbb{R}^*$, $y \neq 0$,

Exercice 13
Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est bornée et dessiner son graphe.

Exercice 14
Dessiner les graphes des fonctions suivantes :
1. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = [x^2]$
2. $v : [0,1] \to \mathbb{R}$, $v(x) = \sqrt{1-x^2}$
3. $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $w(x) = \sin(\sqrt{x})$.

Exercice 15
Démontrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$ $\frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 16
Soit $I = \{x \in \mathbb{R}; -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2\}$.
1. Déterminer les réels x tels que $x + \frac{1}{2x} \leq 2$.
2. Déterminer les réels x tels que $-2 < x + \frac{1}{2x}$.
3. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
4. Déterminer (si ils existent) les majorants, minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de I.

Exercice 17
Démontrer qu'un nombre réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal

$$x \quad = \sum_{n=-n_0}^{\infty} a_n \, 10^{-n}, \quad a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\},$$

devient périodique, i.e. il existe $n_1, N \in \mathbb{N}$ tels que $a_{n+N} = a_n$ pour $n \geq n_1$.

2 Fonctions usuelles

Exercice 18
Résoudre les équations suivantes :
1. $\ln(x^2-1) = \ln(2-x) + \ln(3-x)$.
2. $\exp(2x) - 3\exp(x) + 2 = 0$.

Exercice 19
Soit $\alpha > 0$. Calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{x^\alpha}{\exp(x)}$, $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha}$, $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} x^\alpha \ln(x)$, $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} x^x$.
Traiter d'abord le cas $\alpha = 1$ en utiliant Ex 6 et Ex 7.

Exercice 20
Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x-1}{x+1}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}, \qquad f_3(x) = \sqrt{x^2 - 2\,x - 5},$$

$$f_4(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}, \qquad f_5(x) = \exp(\sin(x) + \cos(x)), \qquad f_6(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x}),$$

$$f_7(x) = \frac{1}{x} \ln\big(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\big), \qquad f_8(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x}), \qquad .$$

Exercice 21
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites de f au bord du domaine de définition.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de f, puis calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le tableau des variations.
5. Représenter graphiquement f.

Exercice 22
Etudier la fonction $g(x) = x \exp^{-x^2}$ (domaine de définition, périodicité, parité, tableau, courbes).

3 Fonctions réciproques

Exercice 23

Fonction arcsin

1. Démontrer que la fonction $sin : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est bijective.
2. Rappeler la définition de la fonction arcsin.
3. Démontrer que arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$.
4. Calculer la dérivée de arcsin.

Exercice 24

Fonction arctan

1. Démontrer que la fonction $tan :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est bijective.
2. Rappeler la définition de la fonction arctan.
3. Démontrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer la dérivée de arctan.

Exercice 25

Résoudre les équations suivantes.

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$, puis $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan(x) = 1$.
2. $\cos(3x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, puis $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6} - 2x)$ et $\sin(2x) = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$.