Master Mécanique
Parcours Aéronautique et Transport

Aéro-Vibroacoustique (P.-O. Mattei)

Janvier 2020

Introduction

Ce cours est décomposé en cinq parties :

- 0 - Rappels sur les notions de base sur les ondes
- 1 - Rayonnement acoustique élémentaire
- 2 - Vibration de plaques minces
- 3 - Vibroacoustique (interaction structure vibrante - fluide immobile)
- 4 - Aéro-vibroacoustique (interaction structure vibrante - fluide en mouvement).

Notions de base sur les ondes

Quelques repères fondamentaux

- Échelles de temps (entre 10^{-6} s et 1 s) et de longueur (entre 10^{-4} m et 100 m) significatives, grande plage dynamique ($> 10^6$)
- Phénomènes complexes du fait du couplage dynamique des ondes sonores et solidiennes
- Interactions difficiles à mesurer et à modéliser du fait de géométries complexes...
- ... et de l'homme
- Forte demande du public et des institutions

Qu'est-ce qu'une onde ?

Transport d'énergie dans un milieu solide ou fluide sans déplacement d'ensemble de la matière.

Les énergies mises en jeux sont faibles : l'énergie d'un champ sonore représente quelques joules. Le rendement d'un haut-parleur ne dépasse pas quelques % et le niveau sonore émis par un HP alimenté par un amplificateur de 100 W est difficilement supportable. À titre d'exemple à 100 Hz, une pression de 0,2 Pa (80 dB) correspond à une puissance de 1 mW !
La propagation d'ondes (mouvement de proche en proche) vient de l'équilibre permanent entre l'inertie et l'élasticité du milieu.
L'onde se caractérise par :

- Amplitude : **faible fluctuation autour d'un état d'équilibre** ; par exemple dans l'air : entre 10^{-5} Pa (seuil d'audibilité) et 10^{3} Pa (fusée au décollage)
- Fréquence : varie du Hz (tremblement de terre) au MHz (ultrasons médicaux)
- Célérité : varie de quelques dizaines (caoutchouc) à plusieurs milliers (métaux) de m/s

Célérité des ondes

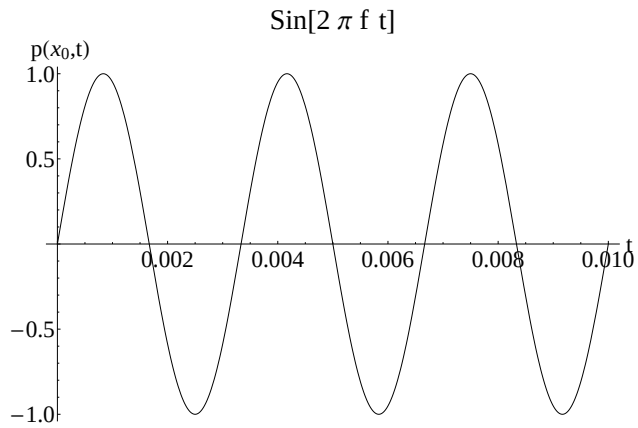
Célérité des ondes acoustiques ou ondes de compression (notée c_0 dans les milieux fluides ou c_L dans les milieux solides :

- air $c_0 = 340$ m/s à 16°C, $c_0 \approx 20\sqrt{T}$, T en degré Kelvin. Par exemple à $T = 5$°C, $c_0 \approx 20\sqrt{273+5} = 333$ m/s.
- caoutchouc : $c_0 = 70$ m/s
- vapeur d'eau à 100°C : $c_0 = 405$ m/s
- hélium : $c_0 = 970$ m/s
- eau $c_0 = 1500$ m/s
- bois : $c_L = 3000$ m/s
- béton : $c_L = 3100$ m/s
- acier, verre : $c_L = 5000$ m/s
- aluminium : $c_L = 5200$ m/s

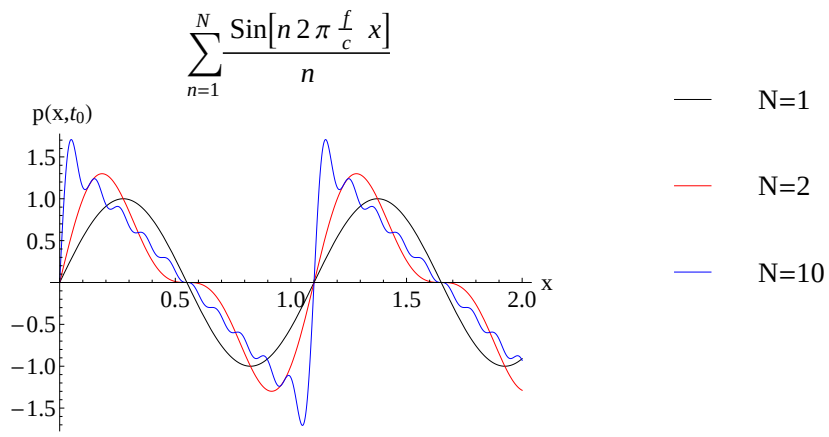
Dans les solides, il existe un autre type d'ondes plus lentes que les ondes de compression : les ondes de cisaillement ou ondes transverses notées c_T.

Représentations d'ondes

évolution temporelle d'une onde sonore prise en un point donné de l'espace. La période du signal est $T = 1/$ s. Pour $f = 300$ Hz, $T = 0,0033\cdots$ s :



Évolution spatiale de diverses ondes sonores prises à un instant donné. $k = 2\pi f/c_0$ est le nombre d'onde (fréquence spatiale) en m^{-1}. La longueur d'onde est $\lambda = c_0/f$. Pour f $= 300$ Hz et $c_0 = 330$ m/s $\lambda = 1,1$ m :



Niveau sonore

La dynamique gigantesque des ondes sonores et de l'oreille humaine a conduit à utiliser une échelle logarithmique, le décibel.
Le niveau sonore (en dB) est défini par $L_p = 10 \log_{10}(\overline{p^2}/p_r^2)$. La référence dans l'air qui est fixée à $p_r = 2\ 10^{-5}$ Pa correspond au seuil d'audibilité à 1000 Hz. Dans l'eau $p_r = 1\ 10^{-6}$ Pa.
1 dB correspond à peu prés à la différence minimale de niveau perceptible.
Par exemple un signal de $p_a = 20$ Pa, qui correspond au seuil de douleur, a un niveau sonore de $L_p = 20 \log_{10}(20/2.10^{-5}) = 120$dB. À cette pression correspond une vitesse ($v = p/\rho_0 c_0$) de 50 mm/s et un déplacement ($u = v/\omega$) de 0,4 mm à 20 Hz, 8 μm à 1 kHz et 0,4 μm à 20 kHz.
Le seuil d'audibilité à 1 kHz est obtenu pour un niveau de 20μPa. Il correspond a une vitesse de **50 nm/s** (vitesse de convection naturelle) et un déplacement de **8 pm** (déplacement comparable au rayon d'un atome).

Niveaux sonores

La définition précédente du niveau sonore suppose que l'on sache définir le niveau de pression $\overline{p^2}$. C'est aisé pour un signal régulier. Si le signal de pression fluctue irrégulièrement, il convient de définir une pression quadratique moyenne (*rms*) :

$$\overline{p^2(t)} = p_{rms}^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T p^2(t)dt,$$

et le niveau sonore par

$$L_p = 10\log_{10}\frac{\overline{p^2(t)}}{p_r^2} = 20\log_{10}\frac{p_{rms}}{p_r}.$$

Pour une onde harmonique $p(t) = P\cos\omega t$, on trouve $p_{rms} = P/\sqrt{2}$.
Rappelons que la transformée de Fourier ($\omega = 2\pi f$, f : fréquence) est définie par

$$\begin{array}{rcl} p(\omega) & = & \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\mathrm{e}^{+\imath\omega t}\mathrm{d}t, \text{ soit encore } p(t) = p(\omega)\mathrm{e}^{-\imath\omega t} \\ p(t) & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega)\mathrm{e}^{-\imath\omega t}\mathrm{d}\omega \end{array}$$

$p(\omega)$ est le spectre du signal de pression et caractérise la répartition de l'énergie du signal en fonction de la fréquence [1]. On peut aussi représenter le spectre en octave ou tiers d'octaves. On montre que l'énergie d'un signal est toujours égale à la somme des énergies contenues dans les bandes d'octaves ou de tiers d'octaves :

$$\overline{p^2(t)} = \sum_{i=1}^{i=N} S(f_i)$$

1. Le théorème de Parseval-Plancherel assure que l'énergie du champ de pression (supposée finie) peut être mesurée de manière équivalente à partir de sa représentation temporelle ou fréquentielle puisque $\int p^2(t)dt = \int p^2(\omega)d\omega$.

Octaves et tiers d'octaves

L'analyse en bandes fines est très utile d'un point du vue signal mais est parfois inutilement riche et s'éloigne de la perception humaine du son. La mesure de niveaux sonores par analyse spectrale sur des bandes de largeur relative constante est très utile. Les plus courantes sont les bandes octaves (fréquence doublée entre deux bandes) et les bandes de tiers d'octaves. Ces bandes sont toujours définies par leur fréquence centrale f_c ; les fréquences extrêmes sont notées f_1 et f_2

$$\begin{array}{rlll} \text{Octaves :} & f_c = \sqrt{f_1 \times f_2} & f_1 = f_c/\sqrt{2} & f_2 = \sqrt{2} f_c = 2 f_1 \\ 1/3 \text{ d'octaves :} & f_c = \sqrt{f_1 \times f_2} & f_1 = f_c/2^{1/6} & f_2 = 2^{1/6} f_c = 2^{1/3} f_1 \end{array}$$

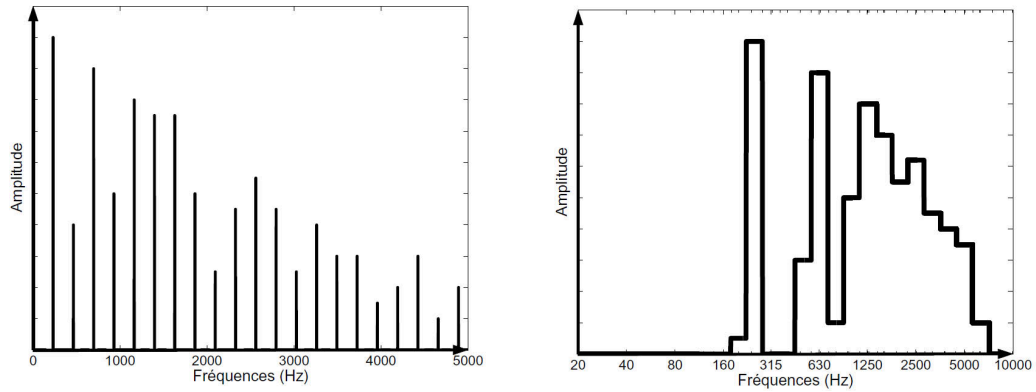
Fréquences centrales (en gras les fréquences centrales des octaves)

$$\overbrace{12,5 - \mathbf{16} - 20} - \overbrace{25 - \mathbf{31,5} - 40} - \overbrace{50 - \mathbf{63} - 80}$$
$$\overbrace{100 - \mathbf{125} - 160}\overbrace{200 - \mathbf{250} - 315} - \overbrace{400 - \mathbf{500} - 630}$$
$$\overbrace{800 - \mathbf{1000} - 1250} - \overbrace{1600 - \mathbf{2000} - 2500} - \overbrace{3150 - \mathbf{4000} - 5000}$$
$$\overbrace{6300 - \mathbf{8000} - 10000} - \overbrace{12500 - \mathbf{16000} - 20000}$$

On retiendra que le niveau sur une octave s'obtient par superposition des niveaux dans chaque bande de tiers d'octave qui la compose (par exemple la bande d'octave centrée sur 125 Hz contient les 3 bandes de tiers d'octave centrées sur 100 Hz, 125 Hz et 160 Hz)

Bandes fines, octaves et tiers d'octaves

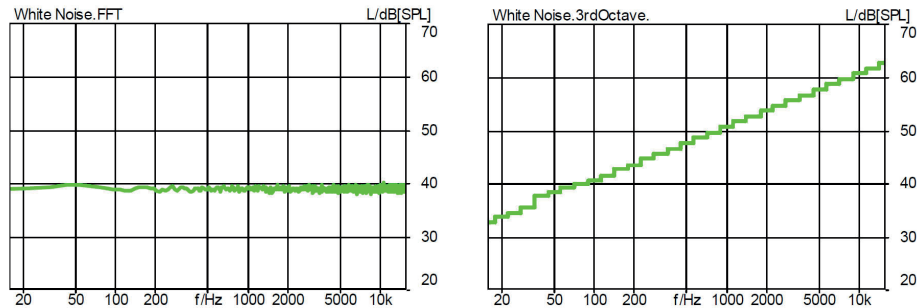
Il faut retenir que les spectres en bandes d'octaves évoluent à $\Delta f/f$ constant alors qu'en bandes fines ils évoluent à Δf constant.



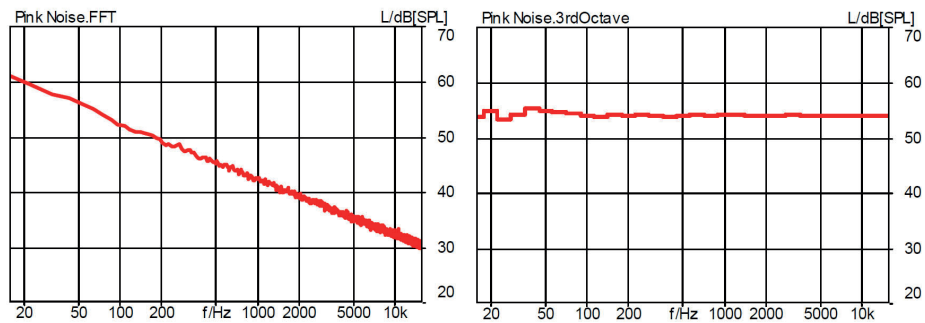
Représentations d'un son de clarinette (fondamentale 233 Hz) en bandes fines et tiers d'octaves

Bruit blanc et bruit rose

Le bruit blanc (transformée de Fourier d'une impulsion) possède une densité spectrale constante en fréquence. Son niveau par bande d'octave (ou de tiers d'octave) est croissant.
Le bruit rose possède une densité spectrale constante en bande d'octaves (ou de tiers d'octaves). Il se rapproche mieux des bruits observés dans la vie quotidienne comme le bruit routier. Il est de fait mieux adaptée à l'acoustique du bâtiment.

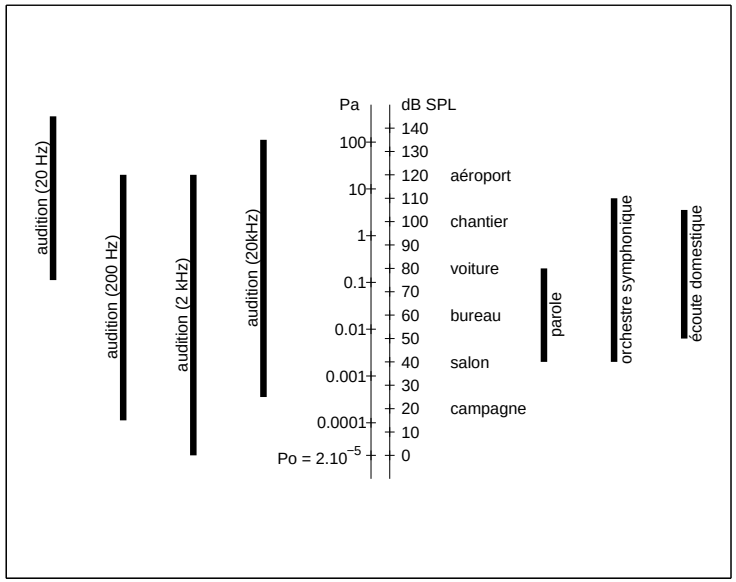


Analyses de Fourier d'un bruit blanc en bande à largeur de fréquence constante ($\Delta f = C$) et en bande de tiers d'octave ($\Delta f/f = C$)



Analyses de Fourier d'un bruit rose en bande à largeur de fréquence constante ($\Delta f = C$) et en bande de tiers d'octave ($\Delta f/f = C$)

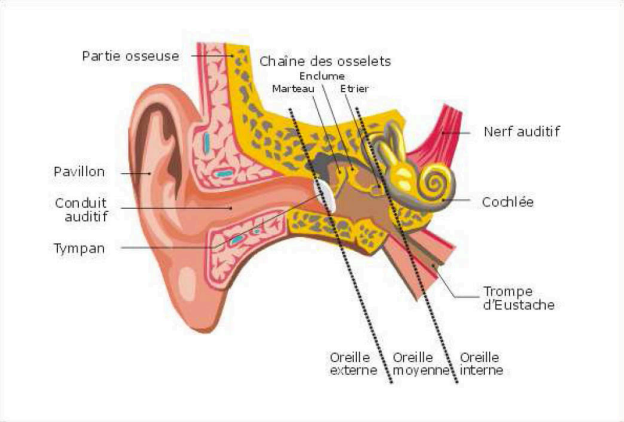
Ordres de grandeur

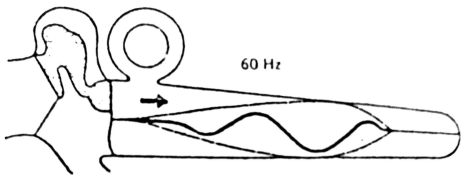


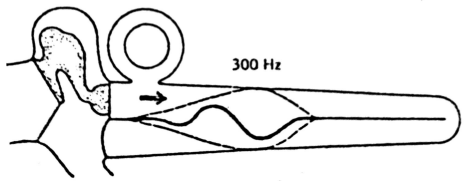
Le système auditif est un formidable analyseur de fréquence. Il perçoit des niveaux dans un rapport de l'ordre du million et a une étendue spectrale de dix octaves ; la vision des couleurs n'en a qu'une... chez l'homme (chien, chat ou taureau voient en mono ou bi-chromatique).

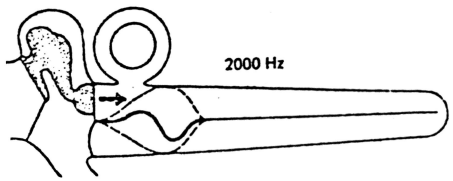
Le système auditif a du mal localiser avec précision les sources dans l'espace (avant/arrière, haut/bas) mais est plus ou moins omnidirectionnel. Le système visuel localise très bien, mais avec une ouverture limitée. L'oreille permet de détecter et l'œil de localiser. Une alarme sonore est efficace pour prévenir d'un danger mais pour indiquer la sortie, il vaut mieux un signal lumineux.

Description de l'oreille









Oreille externe

▷ pavillon : localisation spatiale

▷ conduit auditif : amplification (10 dB) à 3000 Hz

Oreille moyenne

▷ tympan : convertisseur pression/vibration
membrane d'amplitude faible : max 1/10 mm
50 nm à 250 Hz pour un son de 65 dB

▷ osselets : amplificateur vibratoire (30 dB)

▷ muscles (tenseur tympanique, muscle stapédien) : réflexe acoustique de protection contre les sons trop forts (délai d'activation de 150 ms)

▷ étrier : mise en mouvement de la cochlée

Oreille interne

▷ cochlée : membrane qui agit comme un banc de filtres (aigus au début, graves à la fin)

▷ organe de Corti : conversion vibration/impulsions nerveuses

▷ trompe d'Eustache : équilibrage de pression

Sensation ou perception ?

La Psychophysique est la science qui décrit, sous forme de **loi empirique**, la relation entre une stimulation physique Φ et la sensation Ψ qu'elle engendre chez l'être humain.
Il est important de ne pas confondre "sensation" (réponse d'un système de mesure humain -un sens- é un stimulus) et "perception " qui est le résultat de l'intégration d'une ou plusieurs sensations. Par exemple un son est perçu en combinant les sensations de hauteur et de niveau. Deux sons de même fréquence et de niveaux différents ne sont par perçu de la même manière.

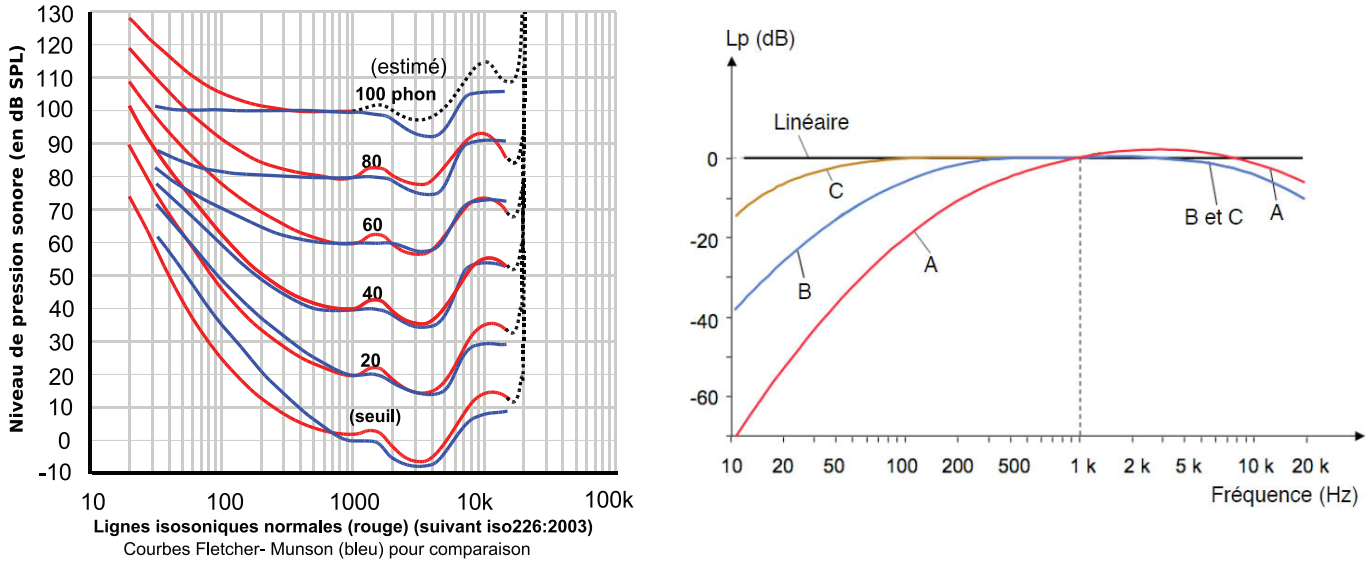
- Loi de Fechner : $\Psi = A \log \Phi + B$. Un rapport constant de stimuli $\Phi_2/\Phi_1 = C$ entraîne que $\log \Phi_2 - \log \Phi_1 = \log C$ et correspond é une différence constante de sensations $\Psi_2 - \Psi_1 = B$)
- Loi de Stevens : $\Psi = A\Phi^b$. Le même rapport constant de stimuli $\Phi_2/\Phi_1 = C$ entraîne que $(\Phi_2/\Phi_1)^b = C^b$ et correspond donc é un rapport constant de sensations $\Psi_2/\Psi_1 = A^b$)

L'expérience a prouvé que c'est la loi de Stevens qui est valable. Pour b petit, les deux lois différent peu (en audition, elles sont souvent confondues).

Sensations liées à l'audition

- La sonie ou intensité perçue d'un son est donnée par la loi de Stevens : $S = kP^{0,6}$. 1 sone est la sonie d'un son pur de 40 dB SPL à 1000 Hz ; ce son aura une sonie de 2 sones à 50 dB, 4 sones à 60 dB. La sonie dépend de la fréquence.
  Le phone est l'unité d'isosonie : niveau physique d'un son de 1000 Hz qui procure la même sensation d'intensité.
- La tonie ou hauteur perçue caractérise l'ordonnancement des sons de grave à aigu. On ne perçoit que difficilement la hauteur absolue (quelle est la hauteur d'une percussion ?) mais facilement les rapports de hauteur (mélodies).
  Le mel est l'unité de "mesure" de la tonie $n_{mel} = 2595 \times \log_{10}(f/700 + 1)$ Soit 150 mels pour 100 Hz, 1000 mels pour 1000 Hz et 2000 mels pour 3500 Hz. Cette échelle rend compte que la hauteur perçue croît moins vite que la fréquence.
- Le timbre est la qualité qui permet de distinguer deux sons de même intensité et de même hauteur. Il dépend du spectre (dépend du rapport entre fondamental et harmoniques) et de son évolution temporelle (en particulier des transitoires d'attaque).
- La rugosité est la qualité caractérise le désagrément que procure l'audition d'un son (craie qui crisse).C'est souvent lié à l'inharmonicité des divers partiels et aux fluctuations temporelles d'enveloppe rapides (> 20 Hz).

Un peu de perception



Lignes isosoniques de Fletcher - Courbes psophométriques (pondération)

Pour prendre en compte la variation de sensibilité de l'oreille par rapport aux fréquences lors des mesures, on utilise couramment le dB(A). Le signal est pondéré par l'inverse de la courbe isosonique qui correspond à un niveau perçu de 40 dB pour un son pur de 1 kHz (courbe 40 phones[2]). 0 dB(A) correspond à peu près au seuil d'audibilité.

2. Le phone est l'unité d'isosonie : niveau physique d'un son de 1000 Hz qui procure la même sensation d'intensité.

La pondération A

La pondération en dB(A) s'obtient en ôtant aux niveaux exprimés à partir des mesures en octaves l'affaiblissement ΔL donné en dB ci-dessous :

f_c	ΔL	f_c	ΔL	f_c	ΔL
31,5	-39,4	250	-8,6	2000	+1,2
63	-26,2	500	-3,2	4000	+1,0
125	-16,1	1000	0	8000	-1,1

ou en tiers d'octaves

f_c	ΔL	f_c	ΔL	f_c	ΔL
25	-44,7	31,5	-39,4	40	-34,6
50	-30,2	63	-26,2	80	-22,5
100	-19,1	125	-16,1	160	-13,4
200	-10,9	250	-8,6	315	-6,6
400	-4,8	500	-3,2	630	-1,9
800	-0,8	1000	0	1250	+0,6
1600	+1,0	2000	+1,2	2500	+1,3
3150	+1,2	4000	+1,0	5000	+0,5
6300	-0,1	8000	-1,1	10000	-2,5

Combinaison de plusieurs sons.

On n'additionne pas les niveaux.

$$L_p = 10\log_{10}\left(\frac{p^2}{p_r^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{\langle p_1 + p_2\rangle^2}{p_r^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{\langle p_1^2\rangle + \langle p_2^2\rangle + 2\langle p_1 p_2\rangle}{p_r^2}\right)$$

De la corrélation des sources dépend le niveau final. Pour deux sources de même niveau sonore, leur combinaison résulte en un son dont le niveau varie entre $-\infty$ et $+6$ dB ! Deux sources non corrélées sont telles que $\langle p_1 p_2\rangle = 0$:

- deux pianos jouant à l'unisson
- des personnes discutant ensemble
- les ventilateurs d'un PC
- le niveau résultant si leurs niveaux sont 60 dB et 80 dB est 80,04 dB $\approx$ 80 dB
- le niveau résultant si leurs niveaux sont 60 dB est 63 dB

Deux sources corrélées sont telles que $\langle p_1 p_2\rangle \neq 0$:

- deux transformateurs côte à côte
- des enceintes placées en écoute stéréo alimentées par le même signal électrique
- un haut-parleur situé devant un mur (signal direct + réfléchi)
- le niveau résultant si elles sont de même fréquence et en phase de niveaux 60 dB est 66 dB

Combinaison de plusieurs sons.

Pour deux sources, on peut utiliser la règle simplifiée d'addition des niveaux :

Différence de niveau	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur é ajouter au niveau le plus élevé	3	2,6	2,1	1,8	1,5	1,2	1	0,8	0,6	0,5	0,4

Pour plusieurs sources de même niveau, on a la règle simplifiée suivante

Nombre de sources de niveau L_p	Niveau résultant dB
2	$L_p + 3$
3	$L_p + 5$
4	$L_p + 6$
5	$L_p + 7$
6	$L_p + 8$
7	$L_p + 8,5$
8	$L_p + 9$
9	$L_p + 9,5$
10	$L_p + 10$

Dans tous les cas, il faut prendre garde au cumul des erreurs d'arrondis.

Problèmes.

• Quel est le niveau obtenu lorsque l'on combine deux sons non corrélés chacun de niveau sonore 0 dB ?
▷ 3 dB !
• Quel est le niveau obtenu lorsque l'on combine quatre sons, deux corrélés de même niveau 20 dB et deux décorrélés des autres de niveau sonore de 25 dB ?
▷ On a
deux sons corrélés $20 \oplus 20 = 26$ dB
deux sons décorrélés $25 \oplus 25 = 28$ dB
donc deux sons décorrélés $26 \oplus 28 \approx 30dB$
• La mesure d'un bruit en tiers d'octaves donne les niveaux suivants : 40 dB à 100 Hz, 41 dB à 125 Hz et 43 dB à 160 Hz. Quel est le niveau de ce bruit sur l'octave centré sur 125 Hz ?
▷ Par définition, un bande d'octave est la superposition de trois bandes de tiers d'octave. Sur chaque bande de tiers d'octave, on a un niveau $L_i = 10\log_{10}(p_i^2/p_r^2)$. Le niveau sur la bande d'octave 125 Hz sera donc de $L = 10Log_{10}[(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)/p_r^2)]$.
On a $p_1^2 = p_r^2 10^4$, $p_2^2 = p_r^2 10^{4,1}$, $p_3^2 = p_r^2 10^{4,3}$. Soit donc
$L = 10\log_{10}(10^4 + 10^{4,1} + 10^{4,3})$ soit environ 46 dB.

Problèmes-suite.

• Un source émet un bruit de 30 dB. Comme faut-il en combiner pour avoir un niveau de 53 dB ?
$\triangleright 10^{23/10} = 200$! 10 sources augmentent le niveau de 10 dB, 100 sources de 20 dB et 200 de 23 dB

• On mesure en tiers d'octaves les niveaux suivants. Quel est le niveau de bruit pondéré A, en octaves et en global ?

f_c	L	f_c	L	f_c	L
100	76 dB	125	76 dB	160	76 dB
200	75 dB	250	75 dB	315	73 dB
400	72 dB	500	71 dB	630	71 dB
800	71 dB	1000	70 dB	1250	69 dB
1600	69 dB	2000	68 dB	2500	66 dB
3150	64 dB	4000	62 dB	5000	56 dB

Problèmes-suite.

On obtient, par bande d'octaves

f_c	L	f_c	L	f_c	L		f_c	L
100	76 dB	125	76 dB	160	76 dB	$\Rightarrow$	125	81 dB
200	75 dB	250	75 dB	315	73 dB	$\Rightarrow$	250	79,2 dB
400	72 dB	500	71 dB	630	71 dB	$\Rightarrow$	500	76,2 dB
800	71 dB	1000	70 dB	1250	69 dB	$\Rightarrow$	1000	75 dB
1600	69 dB	2000	68 dB	2500	66 dB	$\Rightarrow$	2000	72,7 dB
3150	64 dB	4000	62 dB	5000	56 dB	$\Rightarrow$	4000	66,5 dB

et en dB(A)

f_c	L
125	81 -16,1 $\approx$ 65 dB(A)
250	79,2 - 8,6 $\approx$ 70,5 dB(A)
500	76,2 - 3,2 $\approx$ 73 dB(A)
1000	75 + 0 $\approx$ 75 dB(A)
2000	72,7 + 1,2 $\approx$ 74 dB(A)
4000	66,5 +1 $\approx$ 67,5 dB(A)

On obtient :

$$\begin{aligned} L &= 10\log(10^{6,5} + 10^{7,05} + 10^{7,3} + 10^{7,5} + 10^{7,4} + 10^{6,75}) \\ &= 10\log(96\ 700\ 140) = 79,85 \approx 80 \text{ dB(A)} \end{aligned}$$

Rayonnement acoustique

Rayonnement acoustique

équation de propagation des ondes (équation de d'Alembert). $p(M,t)$: pression acoustique

$$\underbrace{\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p(M,t)}{\partial t^2}}_{\text{énergie cinétique}} - \underbrace{\Delta p(M,t)}_{\text{énergie potentielle}} = \underbrace{\rho_0 \frac{\partial q_m(M,t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{F}_v) - \frac{\gamma-1}{c_0^2}\rho_0 \frac{\partial q_e(M,t)}{\partial t}}_{\text{énergie injectée/énergie dissipée}}$$

$\rho_0 q_m(M,t)$ sources de masse, $\rho_0 q_m(M,t)$ sources de chaleur. En général les forces volumiques $\vec{F}_v$ sont négligées.

Source simple

On montre que l'équation des ondes en coordonnées sphériques (milieu homogène et isotrope), en présence d'une seule source de masse, est

$$\frac{\partial^2 rp(r,t)}{\partial r^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 rp(r,t)}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial Q_m}{\partial t}$$

La solution cherchée[3] s'écrit comme une combinaison linéaire d'ondes sortante (S) et rentrante (R) : $p(r,t) = [S(t - r/c_0) + R(t + r/c_0)]/r$.
Considérons maintenant une sphère de rayon a qui se dilate et se contracte uniformément avec une vitesse radiale $V(t)$. Le débit massique sortant de la surface est $\rho_0 Q_m(t) = 4\pi a^2 \rho_0 V(t)$. On suppose que seule l'onde sortante existe et qu'à l'extérieur (et donc à sa surface) de la sphère la loi de Newton s'applique $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}(p) = \vec{F}_v = 0$ (il n'y a pas de sources volumiques dans le milieu). On suppose aussi que les longueurs d'ondes mises en jeu sont très grandes devant la dimension de la sphère. Calculons la pression rayonnée.

3. Pour la trouver, on commence par poser $P(r,t) = rp(r,t)$ puis on effectue le changement de variables $\eta = x + c_0 t$ et $\xi = r - c_0 t$; on exprime alors les dérivées partielles par rapport à r et tt à partir de $d = \partial/\partial\eta d\eta + \partial/\partial\xi d\xi$. On montre alors que l'équation des ondes homogènes se ramène à $\partial^2 P(\eta,\xi)/\partial\eta\partial\xi = 0$. D'où $P(\eta,\xi) = S(\xi) + R(\eta)$

Source simple

Comme seule une onde sortante existe, on a $p(r,t) = S(t - r/c_0)/r$. Calculons $S(t)$. En dehors des sources, la loi de Newton $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}(p)$ projetée sur la normale à la surface, donne avec $\vec{v} = V(t)\vec{n}$ et $\vec{\text{grad}}(p) = (\partial p(r,t)/\partial r)\vec{n}$:

$$\frac{\partial p(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial S(t - r/c_0)}{\partial r} - \frac{S(t - r/c_0)}{r^2} = -\rho_0 \frac{dV(t)}{dt} = -\frac{\rho_0}{4\pi a^2}\frac{dQ_m}{dt}$$

Soit en $r = a$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial S(t - a/c_0)}{\partial r} - \frac{S(t - a/c_0)}{a^2} = -\frac{\rho_0}{4\pi a^2}\frac{dQ_m}{dt}.$$

Si la sphère est compacte/petite ($a \ll \lambda$), $S(t - a/c_0)/a \gg \partial S(t - a/c_0)/\partial r$. Donc

$$S(t - a/c_0) = \frac{\rho_0}{4\pi}\frac{dQ_m}{dt}.$$

Comme la source est compacte, on a $t - a/c_0 \approx t$ (si $a = 1$ cm alors $a/c_0 = 3.10^{-5}$ s) et donc $S(t - a/c_0) \approx S(t)$. La pression rayonnée s'exprime alors à partir de la donnée de $S(t)$ calculée au temps $t - r/c_0$

$$p(r,t) = \frac{\rho_0}{4\pi r}\left(\frac{dQ_m(t)}{dt}\right)_{t=t_r},$$

où $t_r = t - r/c_0$ est le temps de retard.

Source simple

Seules les sources dont le débit fluctue créent des champs sonores. Par exemple, si le débit varie brutalement passant de 0 pour $t < 0$ à 1 pour $t > 0$, alors le débit $\rho_0 Q_m(t) = \rho_0 H(t)$ est un échelon de Heaviside et $H'(t) = \delta(t)$. L'onde créée sera modélisée par une impulsion :

$$p(r,t) = \rho_0 \frac{\delta(t - r/c_0)}{4\pi r}$$

et représente une impulsion sphérique émise à $t = 0$ et qui arrive à l'observateur au temps $t = r/c_0$ et qui décroît en $1/r$

On pose $G(M,t;S,\tau) = 1/(4\pi r)\delta\left(t - \tau - r/c_0\right)$, où $r = d(M,S)$ est la distance entre M le point courant et $t > 0$ le temps au récepteur ; S le point source et $\tau > t > 0$ le temps d'émission de la source

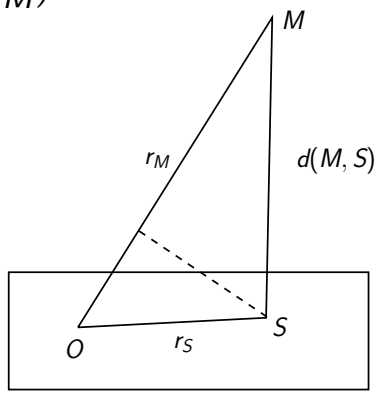
$G(M,t;S,\tau)$ noyau de Green de l'équation de d'Alembert.

Source quelconque - Champ lointain

Pour une source $Q(S,t)$, la solution de l'équation des ondes est $p(M,t) = G(M,t,S,\tau) * Q(S,\tau)$:

$$p(M,t) = G * Q = \frac{1}{4\pi} \int_{V(S)} Q\left(S, t - \frac{r}{c_0}\right) \frac{dS}{r}.$$

En champ lointain, on a $r^2 = r_M^2 - 2\overline{OM} \cdot \overline{OS} + r_S^2$, soit avec $r_s = r_M \overline{OM} \cdot \overline{OS}$ $r^2 = r_M^2 \left(1 - 2r_S/r_M + r_S^2/r_M^2\right)$.



Source de volume $V(S)$

Ainsi $r \approx r_M - r_S + \mathcal{O}\left(r_S^2/r_M^2\right)$.

D'où l'approximation (de Fraunhofer) en champ lointain :

$$p(M,t) \approx \frac{1}{4\pi r_M} \int_{V(S)} Q\left(S, t - \frac{r_M}{c_0} + \frac{r_S}{c_0}\right) dS.$$

Source ponctuelle monopolaire

Si le débit de la source varie périodiquement au cours du temps avec une fréquence f, avec $\omega = 2\pi f$: pulsation ou fréquence angulaire, le débit est donné par $\rho_0 Q_m(t) = \rho_0 q_m \exp(-\imath\omega t)$, on a $dQ_m(t)/dt = -\imath\omega\rho_0 q_m \exp(-\imath\omega t)$ et le champ acoustique est donné par

$$p(r,t) = -\imath\omega\rho_0 q_m \frac{\mathrm{e}^{-\imath\omega\left(t-\frac{r}{c_0}\right)}}{4\pi r},$$

on pose $k = \omega/c_0$ le nombre d'onde (dimension d'inverse de longueur) et on obtient

$$p(r,t) = -\imath k\rho_0 c_0 q_m \mathrm{e}^{-\imath\omega t} \frac{\mathrm{e}^{\imath kr}}{4\pi r},$$

qui fait apparaître l'impédance caractéristique du milieu $z_0 = \rho_0 c_0$

Régime harmonique

Lorsque la dépendance temporelle est périodique de la forme $e^{-\imath\omega t}$, on parle alors de régime harmonique. Toutes les grandeurs s'écrivent

$$F(M,t) = f(M)e^{-\imath\omega t}$$

Sauf mention du contraire dans la suite, on omet la dépendance temporelle.
Une source sonore $f(M)$ rayonne en espace indéfini Ω une pression $p(M)$ qui est solution de l'équation de Helmholtz

$$(\Delta + k^2)p(M) = f(M),$$

On ajoute une condition de conservation de l'énergie :

Condition de Sommerfeld (pas d'onde qui arrive de l'infini)

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} p(r) &= \mathcal{O}(r^{-(n-1)/2}) \\ \lim_{r\to\infty} \left(\frac{\partial p(r)}{\partial r} - \imath k p(r) \right) &= o(r^{-(n-1)/2}) \end{aligned}$$

Principe d'absorption limite $p = \lim_{\epsilon\to 0} p_\epsilon$

$$(\Delta + (k+\imath\epsilon)^2)p_\epsilon(M) = f(M), \epsilon > 0$$

Noyaux de Green

Définition : un noyau de Green $G(M,S)$ est un noyau élémentaire, unique, qui vérifie les conditions de Sommerfeld.

- solution élémentaire : solution d'une équation différentielle dont le second membre est la distribution de Dirac : $(\Delta + k^2)g_0(M) = \delta(M)$.
- noyau élémentaire : fonction de deux variables solution du problème $(\Delta_M + k^2)G(M,S) = \delta_S(M)$ qui satisfait les conditions de Sommerfeld.
  - $\delta_S(M)$: Dirac située en S
  - Δ_M : le Laplacien est appliqué à la variable M.

On a, si $d(M,S)$ est la distance Euclidienne entre M et S, les résultats suivants :

$$
\begin{aligned}
G(M,S) &= \frac{e^{\imath k d(M,S)}}{2\imath k} \text{ dans } R \\
G(M,S) &= -\frac{\imath}{4} H_0^1(kd(M,S)) \text{ dans } R^2 \\
G(M,S) &= -\frac{e^{\imath k d(M,S)}}{4\pi d(M,S)} \text{ dans } R^3
\end{aligned}
$$

$H_0^1(z)$ est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0. On peut vérifier ces résultats par exemple sur le cas 1-D.
EXERCICE. Le faire.

Noyaux de Green

SOLUTION.
On a si M est situé en x et S en x' :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\imath k d(M,S)}}{2\imath k} &= \frac{e^{\imath k|x-x'|}}{2\imath k}, \\
\frac{d}{dx}\frac{e^{\imath k|x-x'|}}{2\imath k} &= \imath k\frac{e^{\imath k|x-x'|}}{2\imath k}\mathrm{sgn}(x-x') \\
\frac{d^2}{dx^2}\frac{e^{\imath k|x-x'|}}{2\imath k} &= -k^2\frac{e^{\imath k|x-x'|}}{2\imath k} + \delta_{x'}(x) \\
(\frac{d^2}{dx^2} + k^2)\frac{e^{\imath k|x-x'|}}{2\imath k} &= \delta_{x'}(x) \text{ cqfd}
\end{aligned}$$

En effet $\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x-x') = 2\delta_{x'}(x)$ et $e^{\imath k|x-x'|}\delta_{x'}(x) = \delta_{x'}(x)$

$G(M,S) = G(S,M)$: principe de réciprocité (si on intervertit la source et la mesure, les résultats restent inchangés).

Noyaux de Green

Physiquement, $G(M,S)$ décrit le rayonnement mesuré en M en espace indéfini d'une source physique de petite dimension qui émet la même énergie dans toutes les directions de l'espace.
En effet, reprenons notre exemple simple de pression rayonnée par une source de débit de petite taille

$$p(r,t) = \frac{\rho_0}{4\pi r} Q'_m(\tau_r), \tau_r = t - r/c_0$$

Si le débit de masse $Q_m(t) = q_m \exp(-\imath\omega t)$ alors, on a

$$\begin{aligned} p(r,t) &= \frac{-\imath\omega\rho_0 q_m}{4\pi r} \mathrm{e}^{-\imath\omega(t-r/c_0)} \\ &= -\imath\omega\rho_0 q_m \frac{\mathrm{e}^{\imath kr}}{4\pi r} \mathrm{e}^{-\imath\omega t} \\ &= -\imath k\rho_0 c_0 q_m \frac{\mathrm{e}^{\imath kr}}{4\pi r} \mathrm{e}^{-\imath\omega t}. \end{aligned}$$

On retrouve évidemment l'expression de la fonction de Green dans l'espace à trois dimensions.

Source ponctuelle dipolaire

Considérons par exemple le système formé de deux monopoles. L'un est situé en $S^+(x=\epsilon, y=0, z=0)$ et l'autre en $S^-(x=-\epsilon, y=0, z=0)$. Le premier a une amplitude de $-1/2\epsilon$ et le second de $1/2\epsilon$. En pratique cela correspond à deux sources identiques en opposition de phase ($-1 = \mathrm{e}^{\imath\pi}$). Le champ de pression créé par ces deux sources par la somme des contributions de chaque source :

$$p_\epsilon(M) = \frac{1}{2\epsilon}\left(\frac{\mathrm{e}^{\imath k r^+}}{4\pi r^+} - \frac{\mathrm{e}^{\imath k r^-}}{4\pi r^-}\right)$$

avec $M=(x,y,z)$ un point du milieu, $r^\pm = \sqrt{(x\mp\epsilon)^2+y^2+z^2}$. On montre par passage à limite $\epsilon \to 0$ que l'on obtient

$$p(M) = -\frac{\mathrm{e}^{\imath k r}}{4\pi r}\left(\imath k - \frac{1}{r}\right)\frac{x}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\mathrm{e}^{\imath k r}}{4\pi r}\right).$$

EXERCICE. Le faire.

Source ponctuelle dipolaire

SOLUTION . Si ϵ est petit, on peut faire un développement en série de Taylor autour de l'origine. On a, avec $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$:

$$\begin{aligned} r^{\pm 2} &= x^2 \mp 2x\epsilon + \epsilon^2 + y^2 + z^2 \\ &= r^2 \mp 2x\epsilon + \epsilon^2 \\ &\approx r^2 \mp 2x\epsilon \end{aligned}$$

Soit finalement $r^{\pm} \approx r\sqrt{1 \mp 2\epsilon \frac{x}{r^2}} \approx r \mp \epsilon \frac{x}{r}$. On a alors

$$\frac{e^{\imath k r^{\pm}}}{4\pi r^{\pm}} \approx \frac{e^{\imath k \left(r \mp \epsilon \frac{x}{r}\right)}}{4\pi r \left(1 \mp \epsilon \frac{x}{r^2}\right)} = \frac{e^{\imath k r}}{4\pi r} \frac{e^{\mp \imath k \epsilon \frac{x}{r}}}{1 \mp \epsilon \frac{x}{r^2}}.$$

En développant $e^{\epsilon} = 1 + \epsilon$ et $1/(1+\epsilon) = 1 - \epsilon$, on obtient

$$\frac{e^{\imath k r^{\pm}}}{4\pi r^{\pm}} \approx \frac{e^{\imath k r}}{4\pi r} \left(1 \mp \imath k \epsilon \frac{x}{r}\right) \left(1 \pm \epsilon \frac{x}{r^2}\right) \approx \frac{e^{\imath k r}}{4\pi r} \left(1 \mp \epsilon \left(\imath k - \frac{1}{r}\right) \frac{x}{r}\right).$$

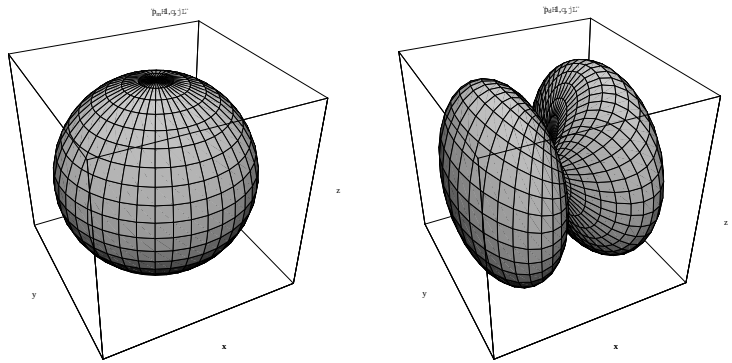
D'où

$$\begin{aligned} p_\epsilon(M) &= \frac{1}{2\epsilon} \frac{e^{\imath k r}}{4\pi r} \left(\left(1 - \epsilon \left(\imath k - \frac{1}{r}\right) \frac{x}{r}\right) - \left(1 + \epsilon \left(\imath k - \frac{1}{r}\right) \frac{x}{r}\right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= -\frac{e^{\imath k r}}{4\pi r} \left(\imath k - \frac{1}{r}\right) \frac{x}{r} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Soit, par passage à la limite $\epsilon \to 0$:

$$p(M) = -\frac{e^{\imath k r}}{4\pi r} \left(\imath k - \frac{1}{r}\right) \frac{x}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{e^{\imath k r}}{4\pi r}\right).$$

Source ponctuelle dipolaire



Pressions rayonnées par un monopole ($I \sim 1$) et un dipôle ($I \sim \cos^2\theta$).

Pour une source dipolaire non ponctuelle, on considère deux sources de débit $\rho_0 q_m$, distantes de ℓ (on nomme $q_m \ell$ le moment dipolaire). Soit θ, l'angle formé par l'axe du dipôle et un point de l'espace, on a en champ lointain

$$p(M,t) \approx -\imath k^2 \rho_0 c_0 \mathrm{e}^{-\imath\omega t} q_m \ell \cos\theta \frac{\mathrm{e}^{\imath kr}}{4\pi r}$$

$p(M) \propto \omega^2$ pour $\omega \to 0$ (moins efficace à basse fréquence qu'un monopole). En pratique, il est plus difficile de réaliser un monopole efficace en très basse fréquence qu'un dipôle.

Source ponctuelle multipolaire

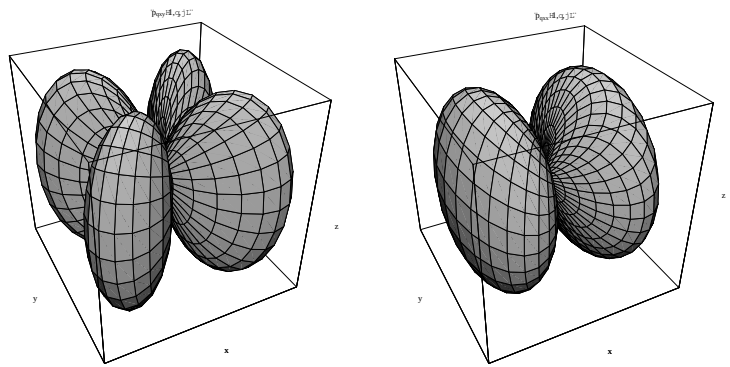
Un autre type de rayonnement acoustique très important dans lorsque l'on s'intéresse au rayonnement acoustique de la turbulence est celui du quadripôle.

$$\Delta p + k^2 p = \frac{\partial^2 \delta(M)}{\partial x_i \partial x_j},$$

la solution s'obtient par dérivation de la fonction de Green dans les directions de l'espace considérées : $\partial^2 G / \partial x_i \partial x_j$.
La pression acoustique rayonnée dépend alors fortement du type de quadripôle.

- Quadripôle longitudinal : $x_i = x_j$ et correspond à deux dipôles placés côte à côte
- Quadripôle latéral : $x_i \neq x_j$ et correspond à deux dipôles superposés.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{e^{\imath kr}}{4\pi r}\left[x_i x_j \frac{k^2}{r^2} + \frac{\imath k}{r^3}\left(3x_i x_j - r^2 \delta_i^j\right) - \frac{1}{r^4}\left(3x_i x_j - r^2 \delta_i^j\right)\right], \quad \begin{array}{l} x_i = x = r\sin\theta\cos\phi \\ x_j = y = r\sin\theta\sin\phi \end{array}$$



Pressions rayonnées en champ lointain par un quadripôle latéral de directivité $\Xi \sim \cos^2\phi \sin^2\phi$ ou longitudinal de directivité $\Xi \sim \cos^4\phi$

Rayonnement de sources réparties

Lorsque la source n'est plus ponctuelle (dimensions comparables à la longueur d'onde) : source surfacique (potentiel de couche : simple couche, double couche, couche d'ordre élevé).
Potentiel de simple couche $\Phi(M)$: distribution de sources monopolaires répartie sur une surface Σ d'amplitude $f(M) = \mu(S) \otimes \delta_\Sigma(M)$, $S \in \Sigma$

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= f(M) * G(M) = (\mu(S) \otimes \delta_\Sigma(M)) * G(M) \\ \Phi(M) &= \int_\Sigma \mu(S) G(M,S) \mathrm{d}S. \end{aligned}$$

$\Phi(M)$ est continu à la traversée de Σ, sa dérivée normale est discontinue à la traversée de Σ.
Si $S_0 \in \Sigma$, on a : $\lim_{M \to S_0} \Phi(M) = \Phi(S_0)$ et

$$\partial_{n(S_0)} \Phi(S_0)^\pm = \pm \frac{\mu(S_0)}{2} + \int_\Sigma \mu(S) \partial_{n(S_0)} G(S_0, S) \mathrm{d}S$$

$\partial_{n(S_0)} \Phi(S_0)^\pm$ signifie que la dérivée normale est prise comme limite en S_0 par la face supérieure ou inférieure de Σ

Rayonnement de sources réparties

Potentiel de double couche $\Psi(M)$: distribution de sources monopolaires répartie sur une surface Σ d'amplitude variable $f(M) = -\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}}(\mu(S) \otimes \delta_\Sigma(M))$, $S \in \Sigma$

$$\Psi(M) = \int_\Sigma \mu(S) \partial_{n(S)} G(M, S) \mathrm{d}S,$$

$\Psi(M)$ est discontinu à la traversée de Σ, sa dérivée normale est continue à la traversée de Σ.
Si $S_0 \in \Sigma$, on a : $\lim_{M \to S_0} \Phi(M) = \Phi(S_0)$ et

$$\Psi(S_0)^\pm = \pm \frac{\mu(S_0)}{2} + \int_\Sigma \mu(S) \partial_{n(S)} G(S_0, S) \mathrm{d}S$$

Représentation de Green

Considérons une fonction définie dans Σ et nulle à l'extérieur de cette surface :

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \sigma_{\partial_n f}\delta_\Sigma + \vec{\nabla}\cdot(\vec{n}\sigma_f\delta_\Sigma)\,,$$

Par produit scalaire avec fonction ϕ, le seconde expression est :

$$\langle \sigma_{\partial_n f}\delta_\Sigma, \phi\rangle = -\langle \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\delta_\Sigma, \phi\rangle,$$

La troisième expression est :

$$\langle \vec{\nabla}\cdot(\vec{n}\sigma_f\delta_\Sigma)\,, \phi\rangle = -\langle \sigma_f\delta_\Sigma, \vec{\nabla}\cdot(\vec{n}\phi)\rangle = \langle f\delta_\Sigma, \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}\rangle \text{ par intégration par parties}$$

Soit :

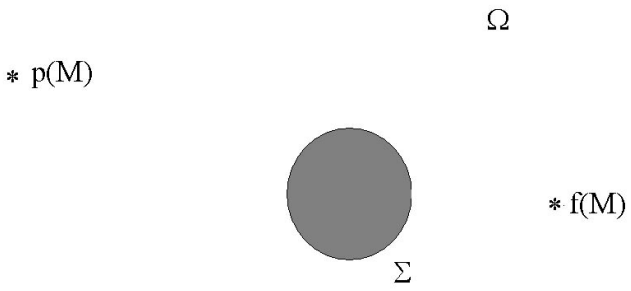
$$\langle \Delta f, \phi\rangle = \langle \{\Delta f\}\,, \phi\rangle - \langle \frac{\partial f}{\partial\vec{n}}, \phi\rangle + \langle f\delta_\Sigma, \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}\rangle = \langle f, \Delta\phi\rangle$$

$\vec{n}$ est la normale extérieure à la surface Σ.
En explicitant le produit scalaire, nous obtenons la formule de Green :

$$\int_V f\Delta\phi - \phi\Delta f \mathrm{d}V = \int_\Sigma f\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} - \frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\phi \mathrm{d}S.$$

Représentation de Green de la pression

On cherche à déterminer le champ de pression $p(M)$,



$$(\Delta + k^2)p(M) = f(M), M \in \Omega$$
$$p(S) = 0 S \in \partial\Omega$$
Conditions de Sommerfeld

Considérons la différence $p(M)\Delta_M G(M, M') - G(M, M')\Delta p(M)$:

$$\begin{aligned} &p(M)\Delta_M G(M, M') - G(M, M')\Delta p(M) \\ &\quad = p(M)(\Delta_M G(M, M') + k^2 G(M, M')) - G(M, M')(\Delta p(M) + k^2 p(M)), \end{aligned}$$

on intègre sur tout le domaine Ω cette égalité et on applique au premier membre le théorème de Green

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (p(Q)\Delta_Q G(Q, M) - G(Q, M)\Delta p(Q))\, \mathrm{d}Q \\ &\quad = -\int_\Sigma \left(\frac{\partial G(S, M)}{\partial \vec{n}(S)} p(S) - G(S, M) \frac{\partial p(S)}{\partial \vec{n}} \right) \mathrm{d}S, \end{aligned}$$

Représentation de Green de la pression

$$\int_\Omega \Big(p(Q)(\Delta_Q G(Q,M) + k^2 G(Q,M)) - G(Q,M)(\Delta p(Q) + k^2 p(Q)) \Big) \mathrm{d}Q = -\int_\Sigma \left(\frac{\partial G(S,M)}{\partial \vec{n}(S)} p(S) - G(S,M) \frac{\partial p(S)}{\partial \vec{n}} \right) \mathrm{d}S.$$

Or $\Delta_Q G(Q,M) + k^2 G(Q,M) = \delta_M(Q)$ et $\Delta p(Q) + k^2 p(Q) = f(Q)$. Donc :

$$p(M) - \int_\Omega G(Q,M) f(Q) \mathrm{d}Q = \int_\Sigma \left(\frac{\partial p(S)}{\partial \vec{n}} G(S,M) - p(S) \frac{\partial G(S,M)}{\partial \vec{n}(S)} \right) \mathrm{d}S.$$

Et on sait que $p_0(M) = \int_\Omega G(Q,M) f(Q) \mathrm{d}Q$ n'est autre que la réponse du milieu en l'absence d'obstacles.
On obtient finalement la représentation de Green de la pression :

$$p(M) = p_0(M) + \int_\Sigma \left(\frac{\partial p(S)}{\partial \vec{n}} G(S,M) - p(S) \frac{\partial G(S,M)}{\partial \vec{n}(S)} \right) \mathrm{d}S.$$

or $p(S) = 0, S \in \Sigma$. La représentation de Green devient alors

$$p(M) = p_0(M) - \int_\Sigma \frac{\partial p(S)}{\partial \vec{n}} G(S,M) \mathrm{d}S,$$

qui se résout, sauf cas particulier, numériquement

Rayonnement acoustique d'un piston bafflé

Calcul de la pression acoustique créée par un piston circulaire bafflé.

Dans R^3, muni du repère cartésien usuel $(0, x, y, z)$, $z > 0$ contient un fluide de densité ρ et de célérité des ondes acoustique c_0. Le demi espace $z < 0$ est vide. Le normale au plan Σ défini par $z = 0$ est orienté par l'axe des z. Sur le plan $z = 0$, un disque de rayon R centré à l'origine définit le domaine occupé par le piston.

On le suppose animé d'un déplacement vibratoire u :

$$u = u_0 \mathrm{e}^{-\imath\omega t}, u_0 \text{ constant}$$

La pression acoustique $P(M)$ est

$$\begin{aligned} \left(\Delta + k^2\right) P(M) &= 0 \\ \partial_n P(Q) &= \omega^2 \rho_0 u_0, Q \in S \\ &= 0, Q \in \Sigma - S \end{aligned}$$

la condition $\partial_n P(Q) = \omega^2 \rho_0 u_0$ traduit la continuité des accélérations normales (loi de Newton)

Rayonnement acoustique d'un piston baffl\'e

La pression acoustique est donnée par la représentation de Green :

$$p(M) = \int_\Sigma p(Q)\partial_{n(Q)} G(M,Q) - \partial_n p(Q) G(M,Q) \mathrm{d}\Sigma(Q),$$

$M = (x, y, z)$ et $Q = (x', y', z' = 0)$ car z' appartient au plan $z = 0$.
La continuité des accélérations vibratoires normales nous permet d'écrire la représentation de Green comme suit :

$$p(M) = \int_\Sigma p(Q)\partial_{n(Q)} G(M,Q)\mathrm{d}\Sigma(S) - \omega^2\rho_0 \int_S u_0 G(M,Q)\mathrm{d}\Sigma(Q).$$

Peut-on simplifier un peu ce résultat ?

Profitons de la géométrie très particulière du problème.
Cherchons le noyau de Green $\mathcal{G}$ qui satisfait au problème de Neumann :

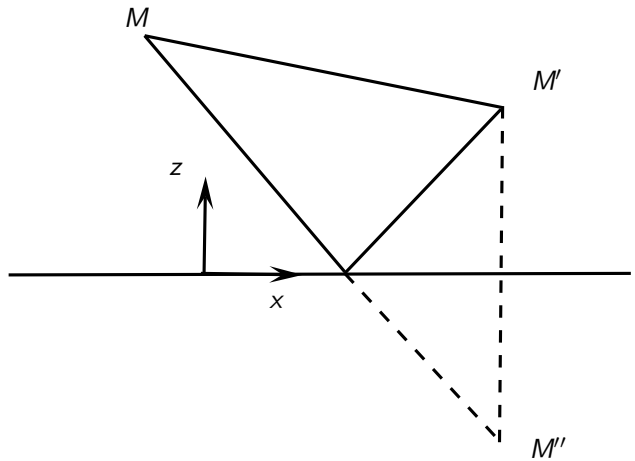
$$\left(\Delta + k^2\right)\mathcal{G}(M,M') = \delta_{M'}(M)$$

$$\partial_{n(M)}\mathcal{G}(M,M') = 0, M \in \Sigma$$

Condition de conservation de l'énergie

Rayonnement acoustique d'un piston baffle

Méthode des images : Le champ émis en M' et reçu en M est la superposition du champ direct émis par la source primaire M' et du champ réfléchi par le plan horizontal.
Ce dernier est modélisé comme le champ émis par une source symétrique M'' par rapport au plan horizontal de la source primaire M'.



On cherche

$$\mathcal{G}(M, M') = \frac{-e^{\imath k d(M,M')}}{4\pi d(M, M')} + C\frac{-e^{\imath k d(M,M'')}}{4\pi d(M, M'')}, C \in \mathbb{C}$$

où $M = (x, y, z)$, $M' = (x', y', z')$ et $M' = (x'' = x', y'' = y', z'' = -z')$.

$d(M, M') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ et
$d(M, M'') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}$.

Rayonnement acoustique d'un piston baffl\'e

Par dérivation

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{G}(M,M') = \frac{-\mathrm{e}^{\imath k d(M,M')}}{4\pi d(M,M')^2}\left(\imath k - \frac{1}{d(M,M')}\right)(z-z') + C\left(\imath k - \frac{1}{d(M,M'')}\right)(z-z'')\frac{-\mathrm{e}^{\imath k d(M,M'')}}{4\pi d(M,M'')^2}.$$

En $z=0$, on a $d(M,M')=d(M,M'')$, avec $z''=-z'$, il est aisé de voir que

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{G}(M,M')=0 \Rightarrow \frac{-\mathrm{e}^{\imath k d(M,M')}}{4\pi d(M,M')^2}\left(\imath k - \frac{1}{d(M,M')}\right)(-z'+Cz')=0 \text{ si } C=1.$$

Si M'' est le symétrique de M' par rapport au plan Σ :

$$\mathcal{G}(M,M') = -\frac{\mathrm{e}^{\imath k d(M,M')}}{4\pi d(M,M')} - \frac{\mathrm{e}^{\imath k d(M,M'')}}{4\pi d(M,M'')}$$

Avec $M=(x,y,z)$ et $M'=(x',y',z')$, nous avons
$d(M,M') = \left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{1/2}$ et
$d(M,M'') = \left((x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2\right)^{1/2}$.

Rayonnement acoustique d'un piston baffl\'e

Puisque la dérivée normale du noyau de Green est nulle sur le plan Σ, la représentation de Green devient alors :

$$p(M) = -\omega^2 \rho_0 \int_S u_0(Q) \mathcal{G}(M, Q) \mathrm{d}\sigma(Q).$$

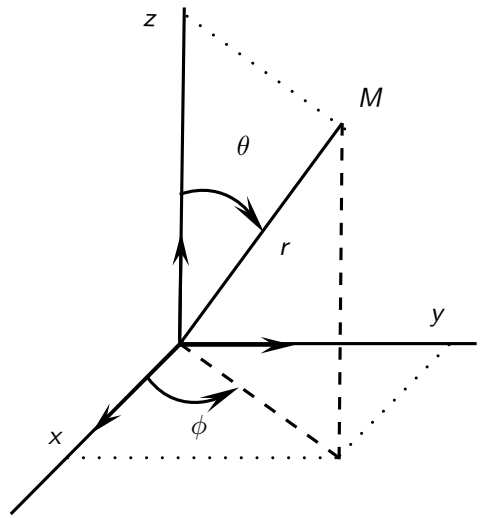
Intégrale de Kirchhoff-Helmholtz

Sur Σ, $z' = 0$ et $M' = M''$. La pression acoustique rayonnée par le piston est donnée par :

$$p(M) = \omega^2 \rho_0 u_0 \int_S \frac{\mathrm{e}^{\imath k \left((x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right)^{1/2}}}{2\pi \left((x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right)^{1/2}} \mathrm{d}x' \mathrm{d}y'.$$

Rayonnement en champ lointain du piston circulaire bafflé - Directivité

En coordonnées sphériques (O, r, θ, ϕ), $M(r', \theta', \phi')$ avec $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$. $M'(r', \theta', \phi')$, $x' = r'\sin\theta'\cos\phi'$, $y' = r'\sin\theta'\sin\phi'$, $z' = r'\cos\theta'$.



M' est un point du piston et en champ lointain $r'/r \ll 1$. Nous savons que pour $kr \gg 1$ et $r'/r \ll 1$

$$\frac{e^{\imath k\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{1/2}}}{2\pi\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{1/2}} \approx \frac{e^{\imath kr}}{2\pi r} e^{-\imath kr' f(\theta,\phi,\theta',\phi')}.$$

avec $f(\theta, \phi, \theta', \phi') = \sin\theta\cos\phi\sin\theta'\cos\phi' + \sin\theta\sin\phi\sin\theta'\sin\phi' + \cos\theta\cos\theta'$

Rayonnement en champ lointain du piston circulaire bafflé - Directivité

Pour démontrer ce résultat, reportons le changement de variables dans l'expression de la distance entre M et M'. On a

$$\begin{aligned}
(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 &= r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r'^2\sin^2\theta'\cos^2\phi' \\
&\quad -2rr'\sin\theta\cos\phi\sin\theta'\cos\phi' \\
&\quad +r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r'^2\sin^2\theta'\sin^2\phi' \\
&\quad -2rr'\sin\theta\sin\phi\sin\theta'\sin\phi' \\
&\quad +r^2\cos^2\theta + r'^2\cos^2\theta' - 2rr'\cos\theta\cos\theta' \\
&= r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin\theta\cos\phi\sin\theta'\cos\phi' \\
&\qquad + \sin\theta\sin\phi\sin\theta'\sin\phi' + \cos\theta\cos\theta') \\
&= r^2 + r'^2 - 2rr' f(\theta,\phi,\theta',\phi').
\end{aligned}$$

Pour $r \gg r'$, $r'/r \ll 1$, donc

$$\begin{aligned}
r^2 + r'^2 - 2rr' f(\theta,\phi,\theta',\phi') &= r^2\left(1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} f(\theta,\phi,\theta',\phi')\right) \\
&\approx r^2\left(1-2\frac{r'}{r} f(\theta,\phi,\theta',\phi')\right).
\end{aligned}$$

Rayonnement en champ lointain du piston circulaire bafflé - Directivité

$\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' f(\theta, \phi, \theta', \phi')} \approx r(1 - r'/r f(\theta, \phi, \theta', \phi'))$.

- Au dénominateur $\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' f(\theta, \phi, \theta', \phi')} \approx r$.
- Au numérateur $e^{\imath k\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{1/2}} \approx e^{\imath k\left(r - r' f(\theta,\phi,\theta',\phi')\right)}$.

Soit

$$\frac{e^{\imath k\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{1/2}}}{2\pi\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{1/2}} \approx \frac{e^{\imath kr}}{2\pi r} e^{-\imath kr' f(\theta,\phi,\theta',\phi')}$$

Valide si $r \gg r'$ et $kr \gg 1$.
Sur le plan Σ, $z' = r' \cos\theta' = 0 \Rightarrow \theta' = \pi/2$, ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{e^{\imath k\left((x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right)^{1/2}}}{2\pi\left((x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right)^{1/2}} &\approx \frac{e^{\imath kr}}{2\pi r} e^{-\imath kr' \sin\theta\left(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi'\right)} \\ &\approx \frac{e^{\imath kr}}{2\pi r} e^{-\imath kr' \sin\theta\cos(\phi-\phi')},\end{aligned}$$

Rayonnement en champ lointain du piston circulaire bafflé - Directivité

Pression acoustique rayonnée par le piston en champ lointain :

$$\begin{aligned} p(M) &\approx \omega^2 \rho_0 u_0 \frac{\mathrm{e}^{\imath kr}}{2\pi r} \int_0^R \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\imath kr' \sin\theta \cos(\phi-\phi')} r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\phi' \\ &\approx \omega^2 \rho_0 u_0 \frac{\mathrm{e}^{\imath kr}}{2\pi r} \int_0^R r' \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\imath kr' \sin\theta \cos\psi} \mathrm{d}\psi \right) \mathrm{d}r' \\ &\approx \omega^2 \rho_0 u_0 \frac{\mathrm{e}^{\imath kr}}{2\pi r} \int_0^R r' 2\pi \mathrm{J}_0\left(kr' \sin\theta\right) \mathrm{d}r' \text{ car } \mathrm{J}_0(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\imath x \cos\psi} \mathrm{d}\psi, \end{aligned}$$

Changement de variable $z = k \sin\theta$:

$$\begin{aligned} p(M) &\approx \omega^2 \rho_0 u_0 R^2 \frac{\mathrm{e}^{\imath kr}}{r} \frac{1}{k^2 R^2 \sin^2\theta} \int_0^{kR\sin\theta} z \mathrm{J}_0(z) \mathrm{d}z \\ &\approx \omega^2 \rho_0 u_0 R^2 \frac{\mathrm{e}^{\imath kr}}{r} \frac{\mathrm{J}_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta}, \text{ car } \int_0^z t^n \mathrm{J}_{n-1}(t) \mathrm{d}t = z^n \mathrm{J}_n(z) \\ &\approx \frac{\mathrm{e}^{\imath kr}}{4\pi r} \left(4\pi \omega^2 \rho_0 u_0 R^2 \frac{\mathrm{J}_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta} \right) \end{aligned}$$

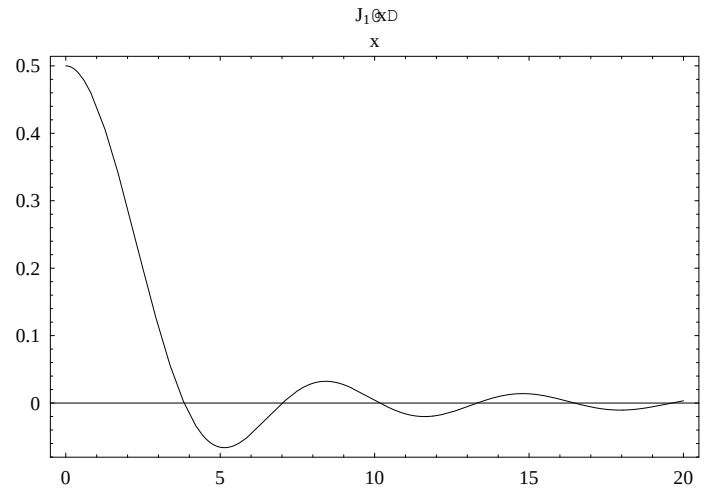
Soit

$$\frac{p(M)}{G(M,O)} \approx 4\pi \omega^2 \rho_0 u_0 R^2 \frac{\mathrm{J}_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta}$$

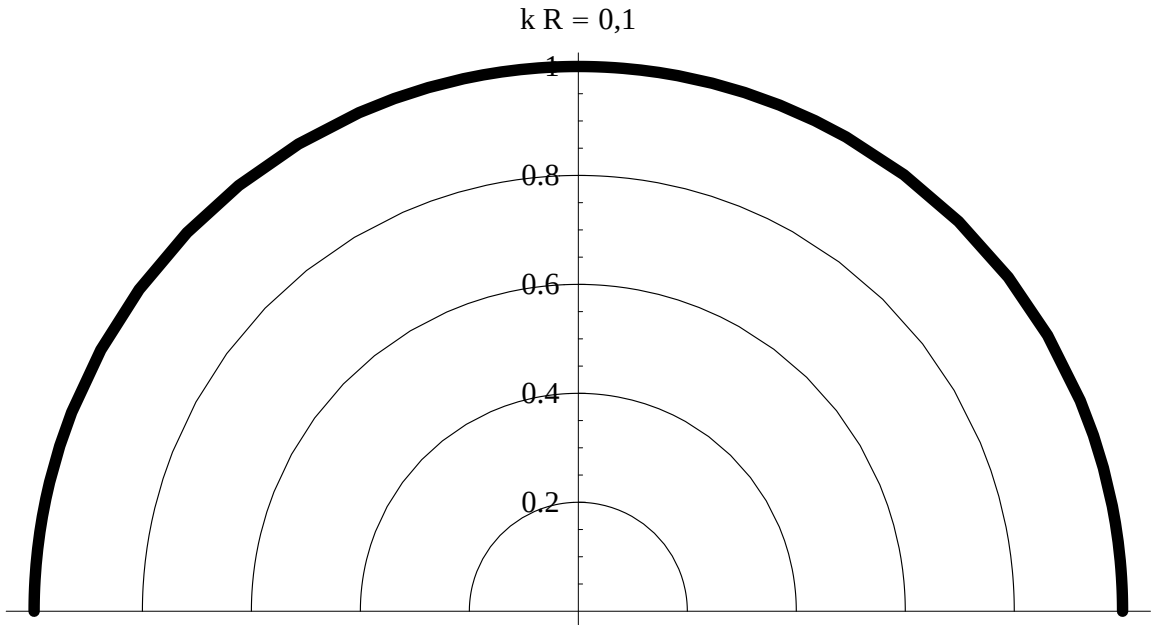
Rayonnement en champ lointain du piston circulaire baffl\'e - Directivité

Directivité/fonction de forme $\Xi(\theta, \phi)$: rapport entre la pression champ lointain de la source et une source ponctuelle (fonction de Green) :

$$\Xi(\theta, \phi) = -4\pi\omega^2 \rho_0 u_0 R^2 \frac{\mathrm{J}_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta}.$$

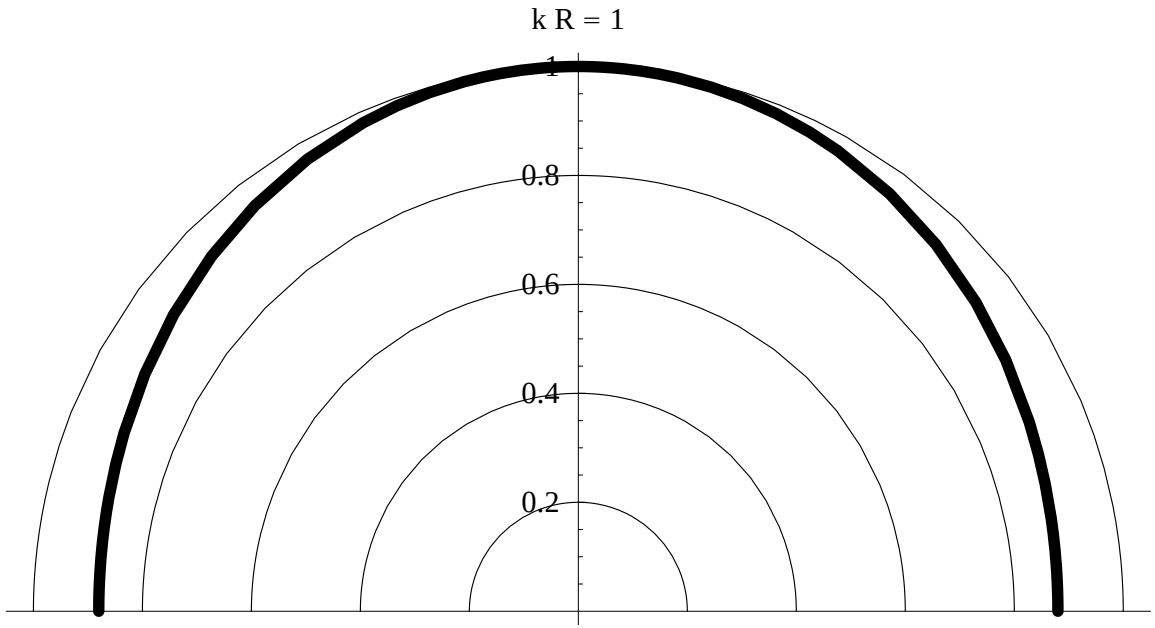


Diagrammes de directivité



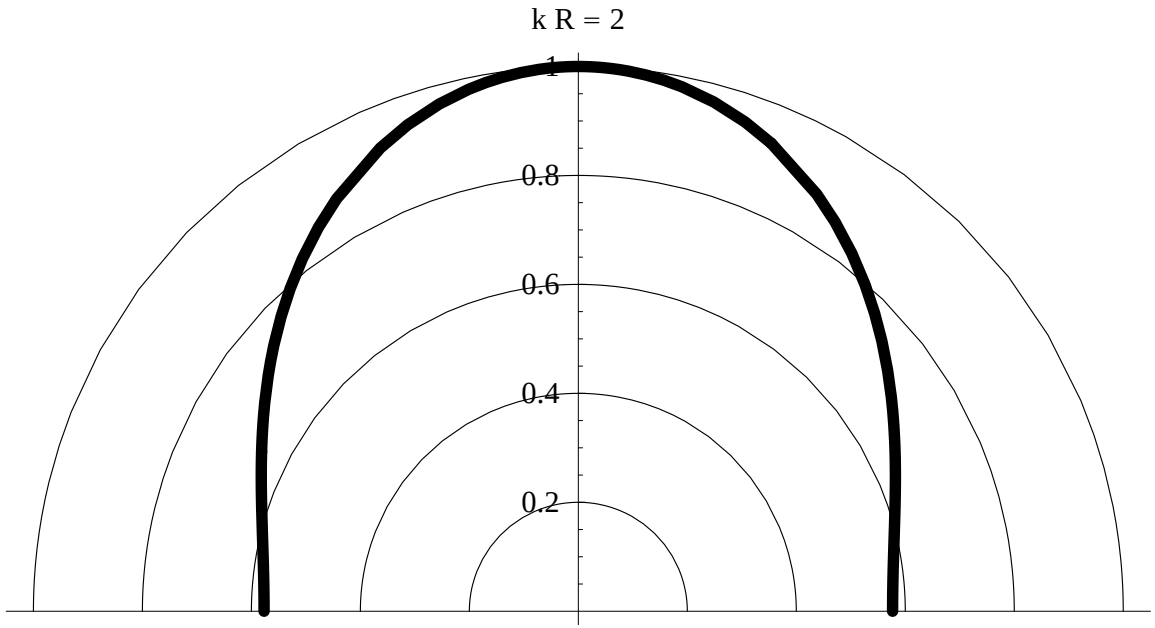
Directivité du piston pour $kR = 0,1$

Diagrammes de directivité



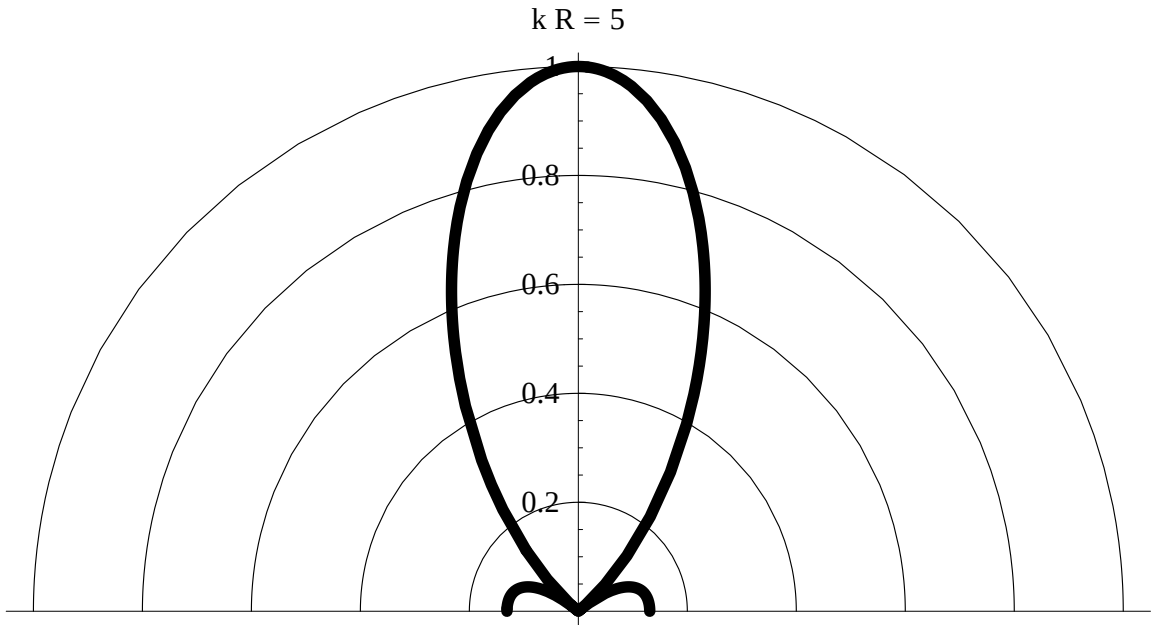
Directivité du piston pour $kR = 1$

Diagrammes de directivité



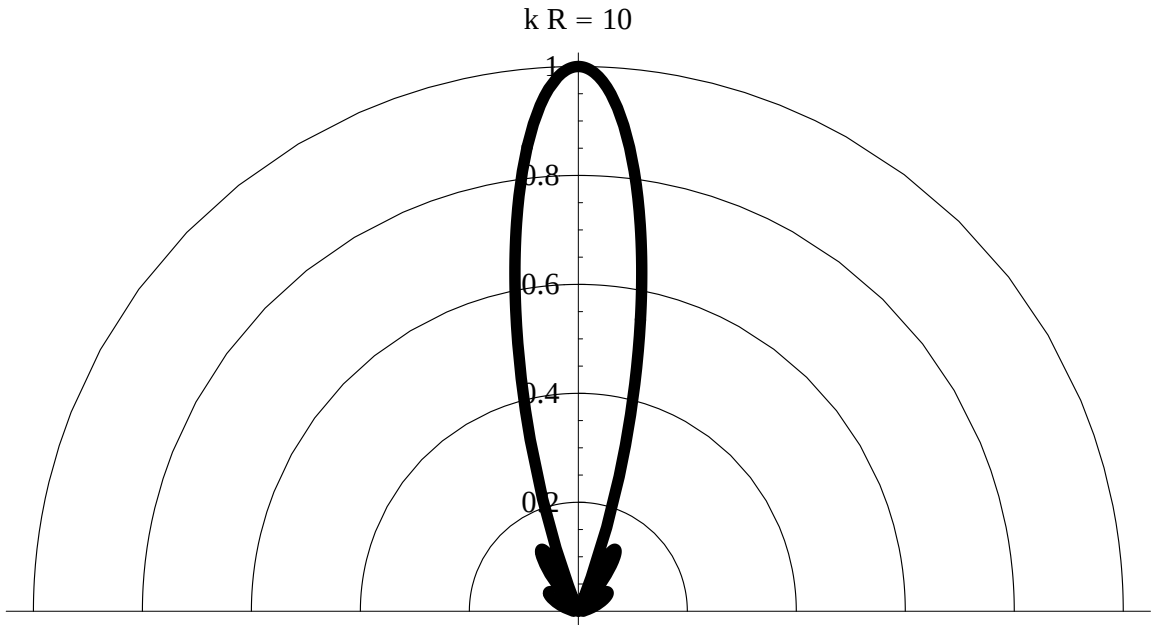
Directivité du piston pour $kR = 2$

Diagrammes de directivité



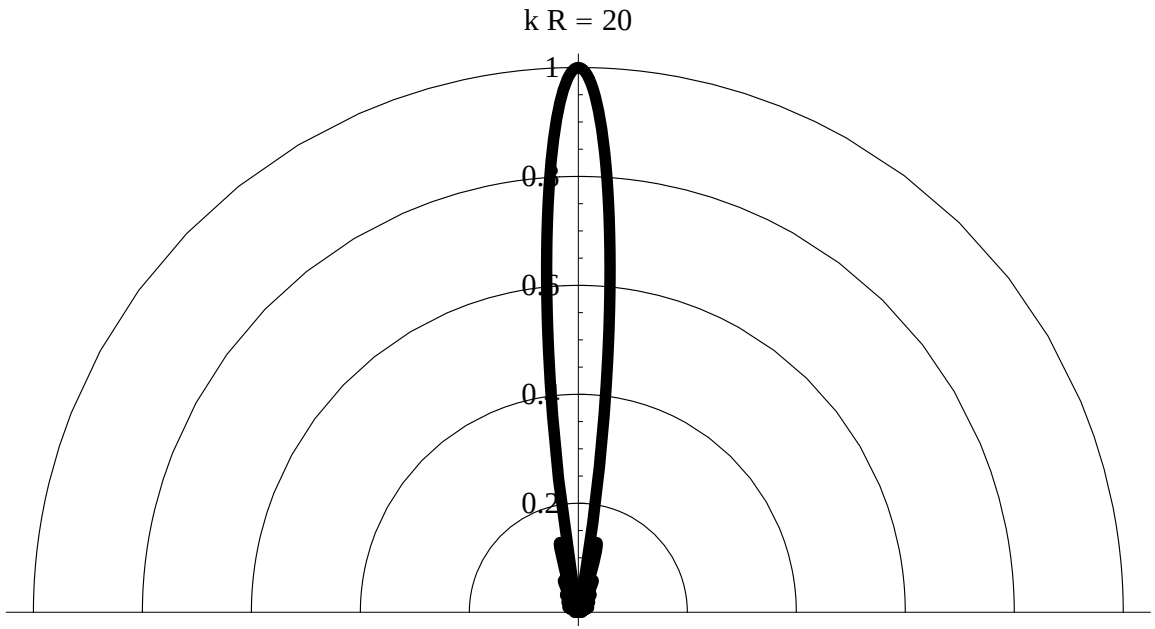
Directivité du piston pour $kR = 5$

Diagrammes de directivité



Directivité du piston pour $kR = 10$

Diagrammes de directivité



Directivité du piston pour $kR = 20$

Rayonnement acoustique dans l'axe du piston baffle - Champ lointain

Dans l'axe : $x = 0$, $y = 0$ et $z = r$. D'où $\theta = \pi/2$ et $f(\theta = \pi/2, \phi, \theta' = \pi/2, \phi') = 0$.
La pression acoustique rayonnée dans l'axe $p(x = 0, y = 0, z) = p(0, z)$:

$$p(0,z) = \omega^2 \rho_0 u_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\imath k\left(z^2+r'^2\right)^{1/2}}}{2\pi \left(z^2+r'^2\right)^{1/2}} r' \,\mathrm{d}r' \,\mathrm{d}\phi' = \omega^2 \rho_0 u_0 \int_0^R \frac{\mathrm{e}^{\imath k\left(z^2+r'^2\right)^{1/2}}}{\left(z^2+r'^2\right)^{1/2}} r' \,\mathrm{d}r'$$

Par changement de variable $u = \left(z^2 + r'^2\right)^{1/2}$:

$$p(0,z) = \omega^2 \rho_0 u_0 \int_z^{(z^2+R^2)^{1/2}} \mathrm{e}^{\imath k u} \mathrm{d}u = -\frac{\imath \omega^2 \rho_0 u_0}{k} \left[\mathrm{e}^{\imath k (z^2+R^2)^{1/2}} - \mathrm{e}^{\imath k z}\right].$$

Soit $|p(0,z)| = \omega \rho_0 c_0 |u_0| \left|\mathrm{e}^{\imath k (z^2+R^2)^{1/2}} - \mathrm{e}^{\imath k z}\right|$.
Avec $\alpha = k(z^2 + R^2)^{1/2}$, $\beta = kz$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{\imath\alpha} - \mathrm{e}^{\imath\beta}\right| &= \left[(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2\right]^{1/2} \\
&= \left[2 - 2\cos(\alpha - \beta)\right]^{1/2} \\
&= 2\left|\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right|.
\end{aligned}$$

Rayonnement acoustique dans l'axe du piston baffle - Champ lointain

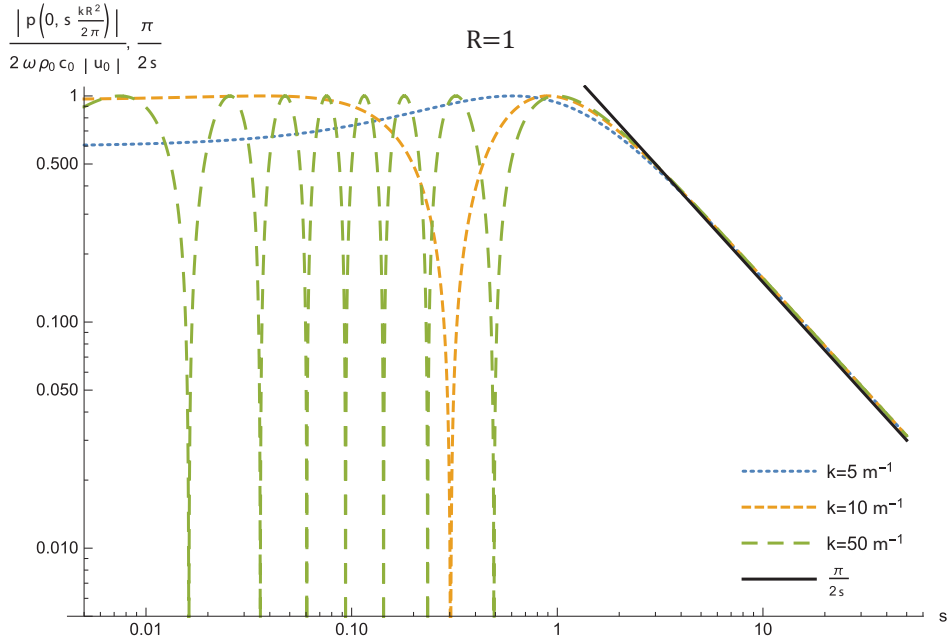
Soit

$$|p(0,z)| = 2\omega\rho_0 c_0 \, |u_0| \left| \sin \frac{k}{2} \left((z^2 + R^2)^{1/2} - z \right) \right|.$$

Lorsque $z \to \infty$, par développement limité, on a
$(z^2 + R^2)^{1/2} - z = R\left(1/2(R/z) - 1/8(R/z)^3 + \mathcal{O}((R/z)^5)\right)$.
Or pour R/z petit, $\sin R/z \approx R/z$, on obtient une décroissance en $1/z$:

$$|p(0, z \to \infty)| \approx \frac{\omega^2 \rho_0 R^2}{2z} \, |u_0|$$

Le champ lointain s'observe pour $z \approx kR^2/(2\pi) = R(R/\lambda)$



Pression acoustique rayonnée dans l'axe d'un piston de rayon $R = 1m$

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire

La surface vibrante est une surface rectangulaire $S : (x, y) \in]-a, a[\cup]-b, b[$ de déplacement vibratoire

$$u(x, y) = u_0(x, y) \exp(-\imath\omega t)$$

A l'interface surface vibrante-fluide, il y a toujours continuité des accélérations vibratoires normales. La pression acoustique $p(M), M \in z > 0$ rayonnée par la surface vibrante est solution du problème :

$$\left(\Delta + k^2\right) p(M) = 0 \in z > 0,$$
$$\partial_n p(Q) = \omega^2 \rho_0 u_0(Q), Q = (x, y) \in S,$$
$$\partial_n p(Q) = 0, Q \in \Sigma - S$$

La pression acoustique rayonnée par la surface est obtenue par représentation de Green :

$$p(M) = \frac{\omega^2 \rho_0}{2\pi} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} u_0(x', y') \frac{\mathrm{e}^{\imath k\left((x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right)^{1/2}}}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right)^{1/2}} dx' dy'$$

En champ lointain, sur Σ nous avons $x' = r' \cos\phi'$, $y' = r' \sin\phi'$, on obtient :

$$p(r, \theta, \phi) \approx \frac{\omega^2 \rho_0}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\imath kr}}{r} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} u_0(x', y') \mathrm{e}^{-\imath k \sin\theta\left(x' \cos\phi + y' \sin\phi\right)} dx' dy'$$

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire

On obtient une transformée de Fourier spatiale partielle du déplacement de la surface :

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} u_0(x',y')\mathrm{e}^{-\imath k\sin\theta\left(x'\cos\phi+y'\sin\phi\right)}\,dx'\,dy' = \left[\tilde{u}_0(\xi,\zeta)\right]_{\xi=k\sin\theta\cos\phi,\zeta=k\sin\theta\sin\phi}$$

Soit

$$p(r,\theta,\phi) \approx 2\omega^2\rho_0\frac{\mathrm{e}^{\imath kr}}{4\pi r}\tilde{u}_0(k\sin\theta\cos\phi, k\sin\theta\sin\phi)$$

C'est un résultat assez général : la pression acoustique rayonnée par une structure vibrante en champ lointain s'exprime à partir de la transformée de Fourier spatiale du déplacement de celle-ci

Rayonnement acoustique d'un piston rectangulaire

Pour le piston rectangulaire $u_0(x, y) = 1$, on obtient :

$$\tilde{u}_0(k\sin\theta\cos\phi, k\sin\theta\sin\phi) = \frac{2\sin(ak\sin(\theta)\cos(\phi))}{k\sin(\theta)\cos(\phi)} \times \frac{2\sin(bk\sin(\theta)\sin(\phi))}{k\sin(\theta)\sin(\phi)}$$

Soit :

$$p_0(r, \theta, \phi) \approx 8\omega^2\rho_0 \frac{e^{\imath kr}}{4\pi r} \frac{\sin(ak\sin(\theta)\cos(\phi))}{k\sin(\theta)\cos(\phi)} \times \frac{\sin(bk\sin(\theta)\sin(\phi))}{k\sin(\theta)\sin(\phi)}$$

On obtient un comportement similaire au piston circulaire.

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale

Déformée antisymétrique $u^a_{mn}(x,y) = \sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)$

Déformée symétrique $u^s_{mn}(x,y) = \cos((m-1/2)\pi x/a)\cos((n-1/2)\pi y/b)$

m et n caractérisent le nombre d'oscillations de la structure. On montre que :

$$\begin{aligned}
\tilde{u}^a_{mn}(k\sin\theta\cos\phi, k\sin\theta\sin\phi) &= (-1)^{m+n}\frac{2ma\pi\sin(ak\cos(\phi)\sin(\theta))}{(m\pi)^2 - a^2k^2\cos(\phi)^2\sin(\theta)^2} \\
&\quad\times\frac{2nb\pi\sin(bk\sin(\theta)\sin(\phi))}{(n\pi)^2 - b^2k^2\sin(\theta)^2\sin(\phi)^2} \\
\tilde{u}^s_{mn}(k\sin\theta\cos\phi, k\sin\theta\sin\phi) &= (-1)^{m+n}\frac{2(m-\frac{1}{2})a\pi\cos(ak\cos(\phi)\sin(\theta))}{((m-\frac{1}{2})\pi)^2 - a^2k^2\cos(\phi)^2\sin(\theta)^2} \\
&\quad\times\frac{2(n-\frac{1}{2})b\pi\cos(bk\sin(\theta)\sin(\phi))}{((n-\frac{1}{2})\pi)^2 - b^2k^2\sin(\theta)^2\sin(\phi)^2}.
\end{aligned}$$

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale

Avec $k_m = m\pi/a$ et $k_n = n\pi/b$ (k_m, k_n : nombres d'onde). On obtient :

$$p^a_{mn}(r,\theta,\phi) \approx \frac{8\omega^2\rho_0 e^{\imath kr}}{4\pi r}(-1)^{m+n}k_m k_n \frac{\sin(ak\cos(\phi)\sin(\theta))}{k_m^2 - k^2\cos(\phi)^2\sin(\theta)^2} \times \frac{\sin(bk\sin(\theta)\sin(\phi))}{k_n^2 - k^2\sin(\theta)^2\sin(\phi)^2}$$

$$p^s_{mn}(r,\theta,\phi) \approx \frac{8\omega^2\rho_0 e^{\imath kr}}{4\pi r}(-1)^{m+n}k_{m-\frac{1}{2}}k_{n-\frac{1}{2}} \frac{\cos(ak\cos(\phi)\sin(\theta))}{k^2_{m-\frac{1}{2}} - k^2\cos(\phi)^2\sin(\theta)^2} \times \frac{\cos(bk\sin(\theta)\sin(\phi))}{k^2_{n-\frac{1}{2}} - k^2\sin(\theta)^2\sin(\phi)^2}$$

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale

Comportements asymptotiques :

En basse fréquence, $k \to 0$:

$$p^a_{mn}(r,\theta,\phi) \approx \frac{8\omega^2\rho_0 e^{\imath kr}}{4\pi r}(-1)^{m+n}\frac{abk^2\cos(\phi)sin(\phi)\sin^2(\theta)}{k_m k_n}$$

$$p^s_{mn}(r,\theta,\phi) \approx \frac{8\omega^2\rho_0 e^{\imath kr}}{4\pi r}(-1)^{m+n}\frac{1}{k_{m-\frac{1}{2}}k_{n-\frac{1}{2}}}$$

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale

Comportements asymptotiques :

Plus le nombre d'oscillations augmente ($k_m \to \infty$ et $k_n \to \infty$), plus la pression rayonnée diminue :

$$p^a_{mn}(r,\theta,\phi) \approx \frac{8\omega^2\rho_0 e^{\imath kr}}{4\pi r}(-1)^{m+n}\frac{\sin(ak\cos(\phi)\sin(\theta))}{k_m} \times \frac{\sin(bk\sin(\theta)\sin(\phi))}{k_n}$$

$$p^s_{mn}(r,\theta,\phi) \approx \frac{8\omega^2\rho_0 e^{\imath kr}}{4\pi r}(-1)^{m+n}\frac{\cos(ak\cos(\phi)\sin(\theta))}{k_{m-\frac{1}{2}}} \times \frac{\cos(bk\sin(\theta)\sin(\phi))}{k_{n-\frac{1}{2}}}$$

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale

Comportements asymptotiques :

Pression rayonnée dans l'axe ($\theta = 0$) :

$$p^a_{mn}(r,\theta,\phi) \approx 0$$

$$p^s_{mn}(r,\theta,\phi) \approx \frac{8\omega^2\rho_0 e^{\imath kr}}{4\pi r}(-1)^{m+n}\frac{1}{k_{m-\frac{1}{2}}k_{n-\frac{1}{2}}} = \frac{8\omega^2\rho_0 e^{\imath kr}}{4\pi r}(-1)^{m+n}\frac{ab}{\pi^2(m-\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})}$$

On obtient, pour $p^s_{mn}(r,0,\phi)$, un résultat comparable au piston rectangulaire dans l'axe

$$p_0(r,0,\phi) \approx 8\omega^2\rho_0\frac{e^{\imath kr}}{4\pi r}ab.$$

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale

La pression rayonnée présente un certain nombre de maximas fixés par les zéros du dénominateur (dépend de θ et ϕ si $k_m, k_n < k$).

Ces maxima sont données pour les angles θ_0, ϕ_0

$$\begin{aligned} k_m &= k\cos(\phi_0)\sin(\theta_0) \\ k_n &= k\sin(\phi_0)\sin(\theta_0) \end{aligned}$$

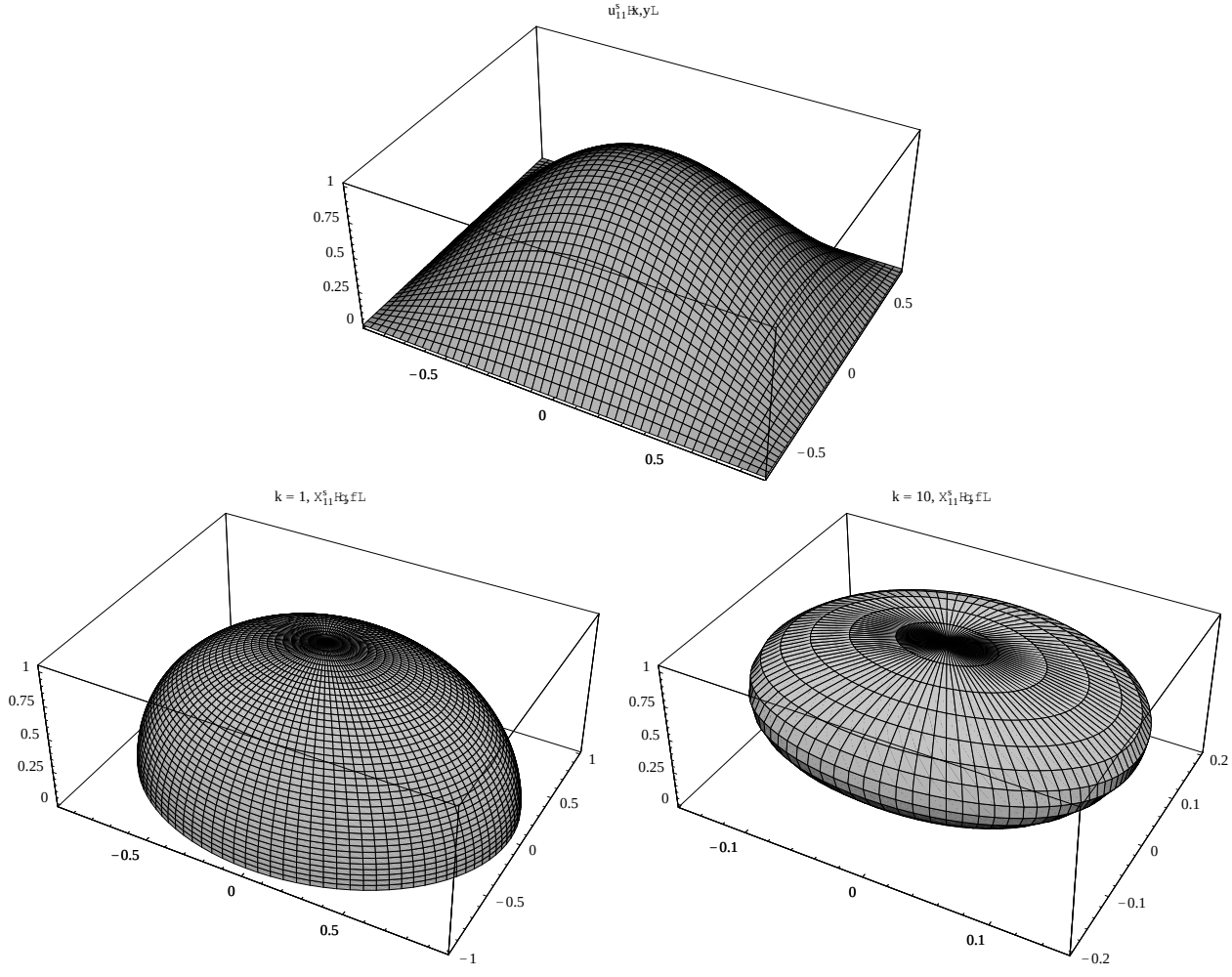
$k_s = \sqrt{k_m^2 + k_n^2}$. On obtient 4 directions : avec $\theta_0 = \sin^{-1} k_s/k$ et $\phi_0 = \tan^{-1} k_n/k_m$, $\phi_1 = -\phi_0$, $\phi_{2,3} = \pi \pm \phi_0$: angles critiques ou de coïncidence.

On obtient

$$p_{mn}^{a,s}(r, \theta_0, \phi_p) \approx \omega^2 \rho_0 \frac{e^{\imath kr}}{4\pi r} 2ab \text{ pour } k_m, k_n < k, p = 0, 1, 2, 3.$$

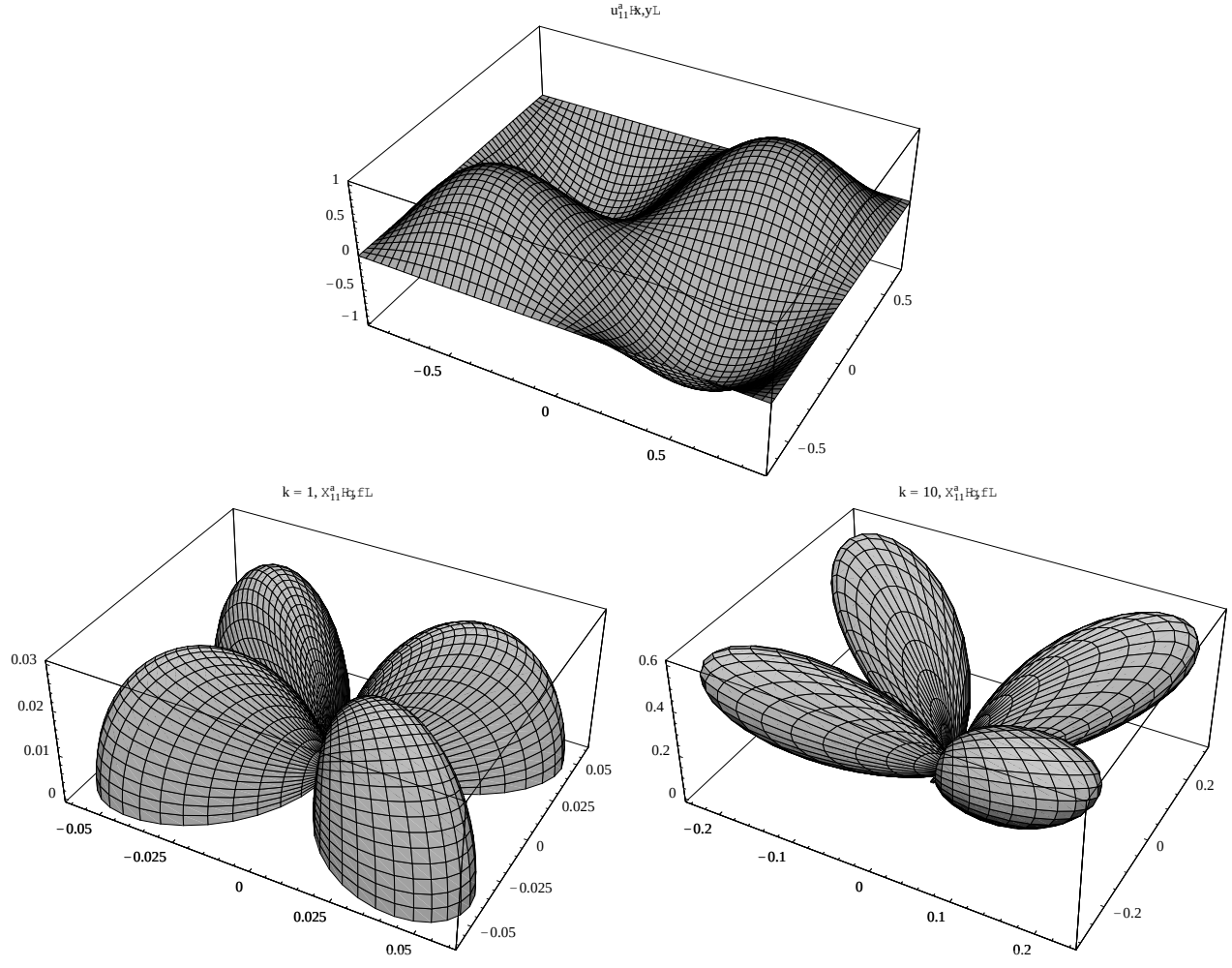
$p_{mn}^{a,s}(r, \theta_0, \phi_p)$ ne dépend pas de m ni de n

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale



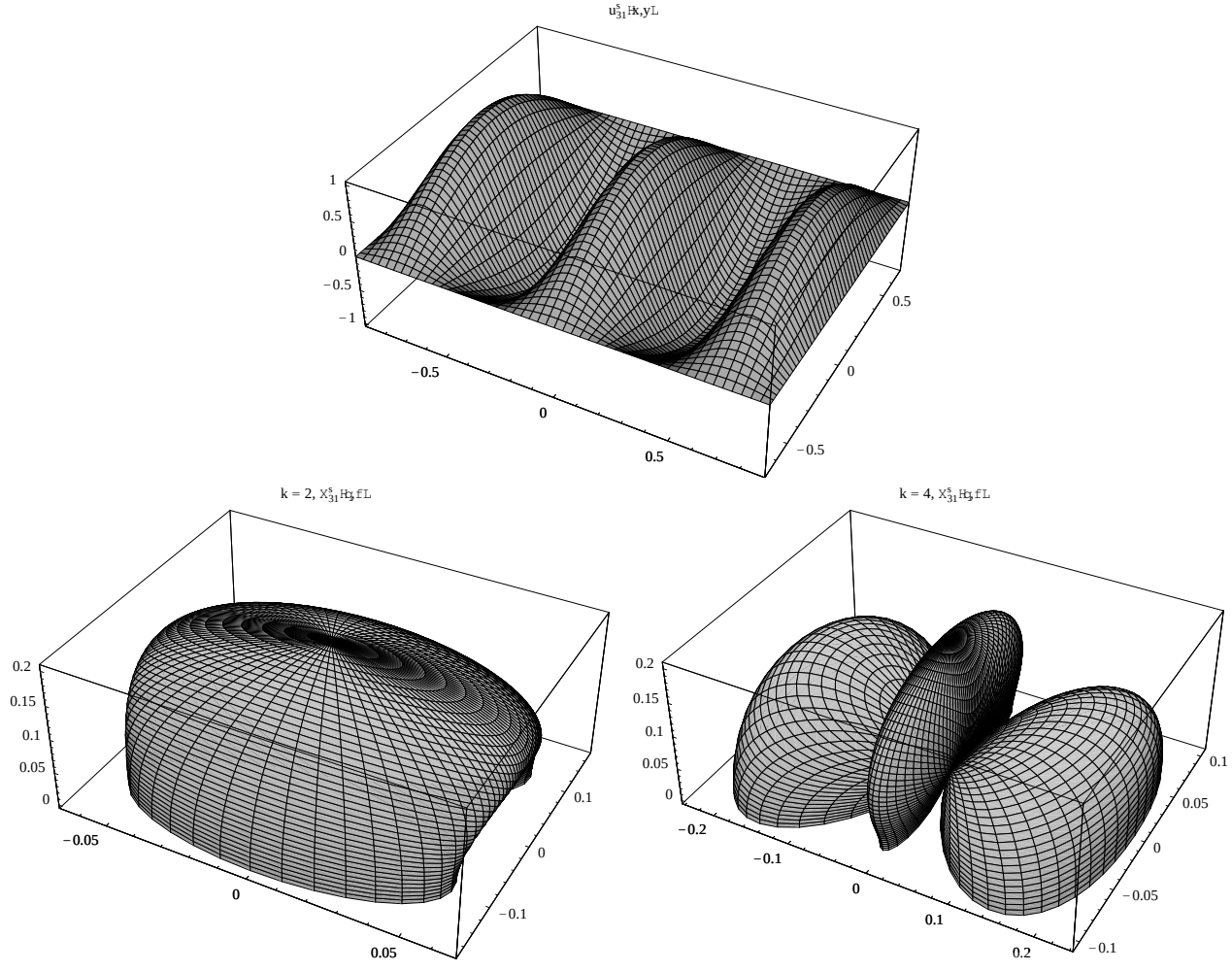
Déformée et directivité "symétrique" pour $m = 1$, $n = 1$ et pour $k = 1$ et 10 m^{-1}

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale



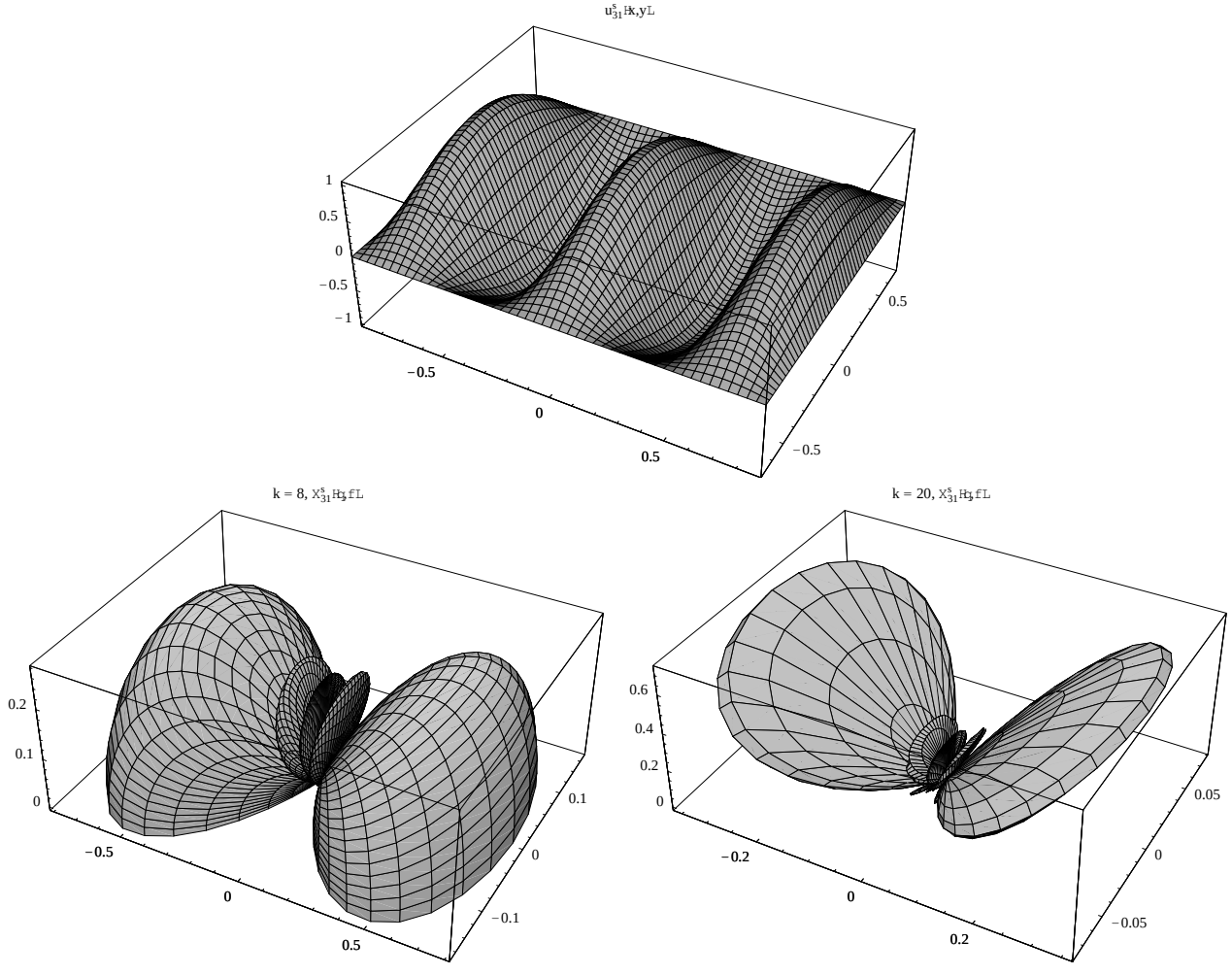
Déformée et directivité "antisymétrique" pour $m = 1$, $n = 1$ et pour $k = 1$ et 10 m^{-1}

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale



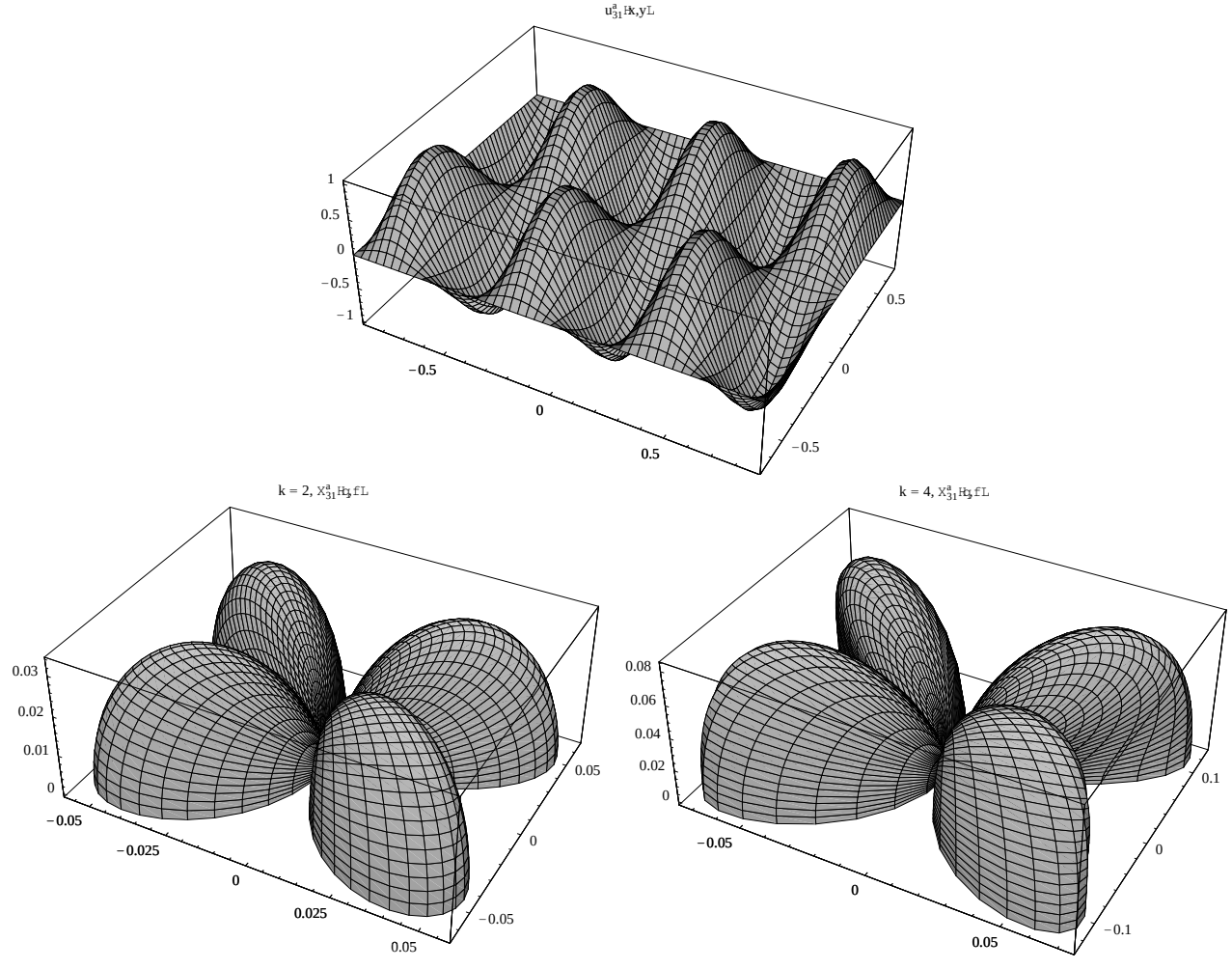
Déformée et directivité "symétrique" pour $m = 3$, $n = 1$ et pour $k = 2$ et 4 m^{-1}

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale



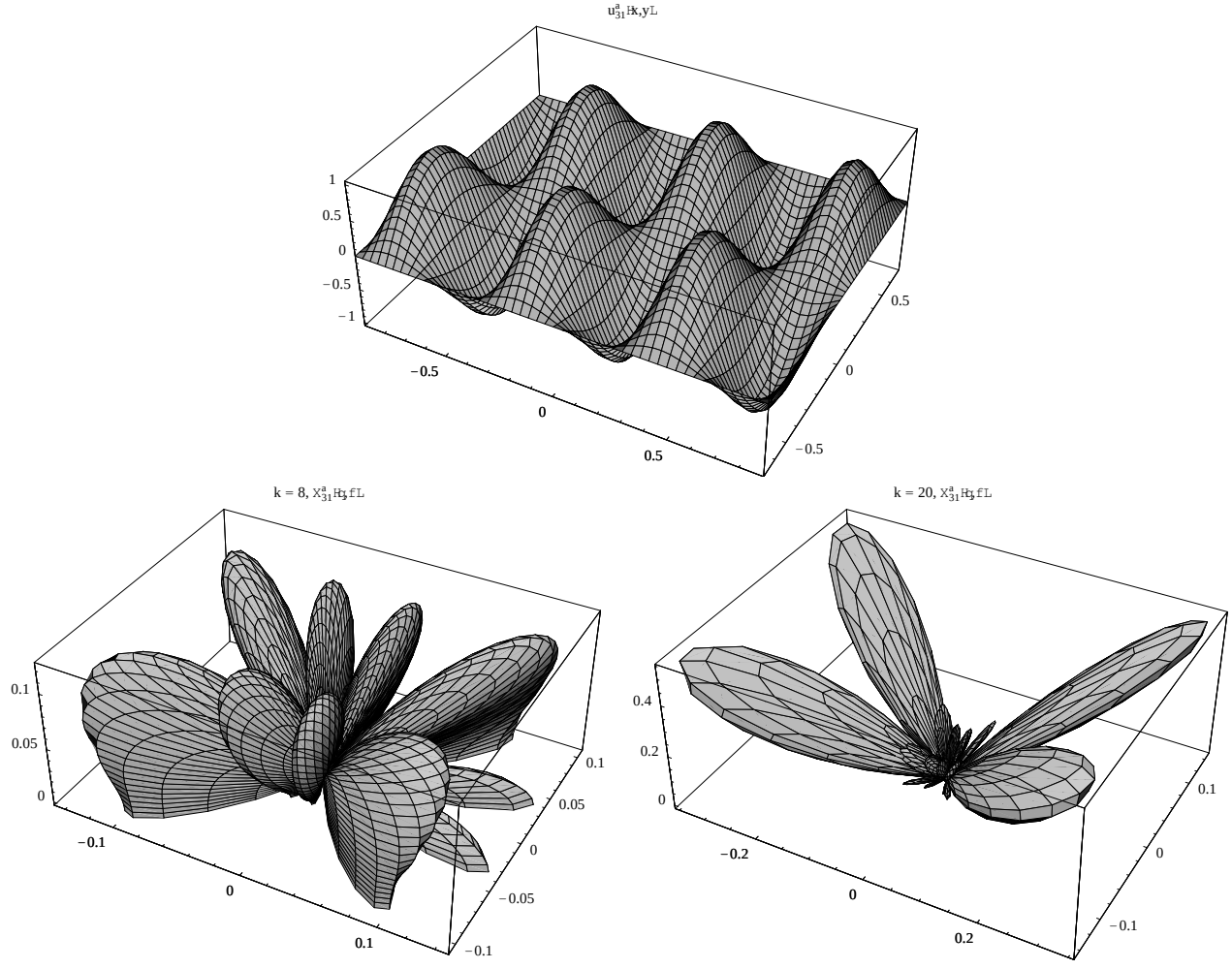
Déformée et directivité "symétrique" pour $m = 3$, $n = 1$ et pour $k = 8$ et 20 m^{-1}

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale



Déformée et directivité "antisymétrique" pour $m = 3$, $n = 1$ et pour $k = 2$ et 4 m^{-1}

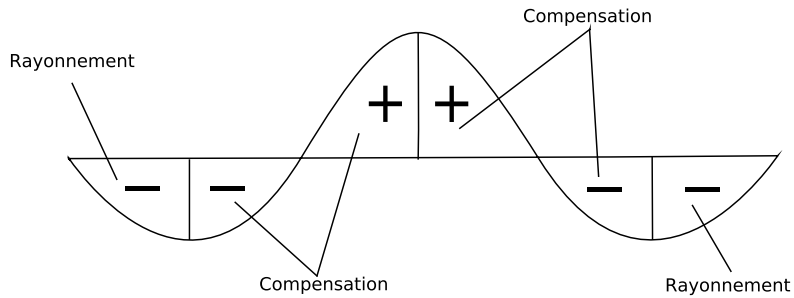
Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale



Déformée et directivité "antisymétrique" pour $m = 3$, $n = 1$ et pour $k = 8$ et 20 m^{-1}

Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire à déformée sinusoïdale

On retiendra que le maximum de rayonnement d'une structure s'observe très souvent au voisinage de ses discontinuités géométriques (modes de bord et modes de coin) puisqu'alors le phénomène de compensation est beaucoup plus faible. Ceci n'est pas vérifié au bord des structures non bafflées car dans ce cas la compensation est maximale par équilibrage des pressions de part et d'autre du bord.



Explication du phénomène de compensation

Rayonnement acoustique de sources en mouvement

Source de débit : $Q(S,t) = \rho_0 \partial Q_m(S,t)/\partial t \approx \rho_0 (v/\ell)/(\ell/v) \approx \rho_0 (v/\ell)^2$.
Source spatialement compacte

$$p(M,t) \approx \frac{1}{4\pi r_M} \int_{V(S)} Q\left(S, t - \frac{r_M}{c_0}\right) dS \approx \frac{1}{r_M} \rho_0 \frac{v^2}{\ell^2} \ell^3 \approx \frac{\rho_0 c_0^2 \ell}{r_M} M^2.$$

La pression rayonnée est proportionnelle à $\rho_0 v^2$ et on a :

$$p(M,t) \approx \frac{1}{4\pi r_M} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(S)} Q_m\left(S, t - \frac{r_M}{c_0}\right) dS.$$

Le rayonnement est contrôlé par les variations temporelles de la source.

Rayonnement acoustique de sources en mouvement

Source de débit : $Q(S,t) = \rho_0 \partial Q_m(S,t)/\partial t \approx \rho_0 (v/\ell)/(\ell/v) \approx \rho_0 (v/\ell)^2$.

Source spatialement non compacte

$$p(M,t) \approx \frac{c_0}{4\pi r_M} \int_S \int_\tau Q(r_M - c_0 t, y_S, t) dy_S d\tau \approx \frac{c_0}{r_M} \rho_0 \frac{v^2}{\ell^2} \ell^2 \frac{\ell}{v} \approx \frac{\rho_0 c_0^2 \ell}{r_M} M.$$

La pression rayonnée est proportionnelle à $\rho_0 c_0 v$ et on a :

$$p(M,t) = -\frac{c_0^2}{4\pi r_M} \int_S \int_\tau \frac{\partial}{\partial r_S} Q(r_M - c_0 t, y_S, t) dy_S d\tau,$$

où $\partial/\partial t = \partial/\partial r_S \; \partial r_S/\partial t = -c_0 \partial/\partial r_S$ Le rayonnement est contrôlé par les variations spatiales de la source dans la direction de l'observateur.

Effet Doppler

Supposons que l'onde se déplace dans un milieu au repos avec une célérité c_0 (référentiel R_0), que la vitesse de la source est v_s (référentiel R_s) et que celle du récepteur est v_r (référentiel R_r). Emetteur et récepteur se déplacent sur une ligne droite. f_0 est la fréquence d'émission des impulsions dans le référentiel de la source. En une période $T_0 = 1/f_0$, l'impulsion émise par la source a parcouru une distance $d_0 = c_0 T_0$ dans R_0. Comme durant T_0, la source s'est déplacée de $v_S T_0$, la distance qui sépare deux impulsions dans R_0 est $d_s = (c_0 - v_s) T_0$.
Calculons le temps T_r qui sépare la réception de deux impulsions par le récepteur. Entre deux impulsions, le récepteur aura parcouru la distance $v_r T_r$, la deuxième impulsion aura parcouru la distance $d_r = d_s + v_r T_r = c_0 T_r$ soit, $T_r = d_s/(c_0 - v_r)$ et une fréquence reçue de $f_r = 1/T_r = (c_0 - v_r)/d_s$.
Ainsi :

$$f_r = \frac{c_0 - v_r}{c_0 - v_s} f_0 = \frac{1 - v_r/c_0}{1 - v_s/c_0} f_0$$

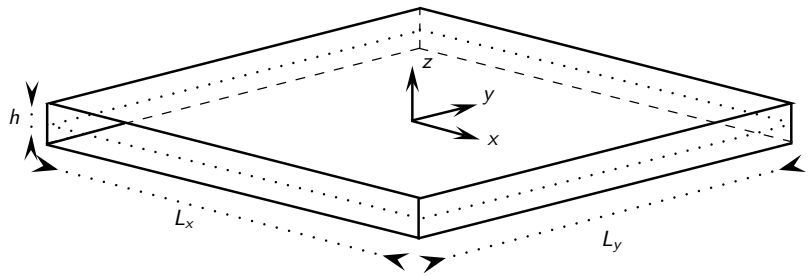
Vibrations de plaques minces.

Structures minces

Dans la plupart des constructions humaines, les structures sont des assemblages de plaques et poutres minces.
Un corps mince est un solide qui occupe dans l'espace un volume limité par deux surfaces telles que la distance qui les sépare et l'inverse de la longueur d'onde mécanique soient petites devant les autres dimensions de la structure. Par exemple, une vitre est une plaque mince, le corps d'une guitare ou d'un violon est composé de plaques minces. On définit la surface moyenne [4] comme le lieu des points équidistants aux deux surfaces qui limitent le corps (le plan médian de notre vitre).
On transforme les équations tridimensionnelles en équations plus simples (1-D et 2-D) qui portent sur une seule inconnue : le déplacement normal de la surface (ou de la ligne) moyenne. Le prix est une complexification des opérateurs : initialement d'ordre 2 en espace on est amené à traiter des équations d'ordre 4 (ou plus) en espace.

4. Cette notion de surface moyenne (propriété géométrique) est souvent confondue avec celle de surface neutre (propriété mécanique). En effet, imaginons que nous courbions cette plaque. La face inférieure de la plaque va subir une compression tandis que sa face supérieure subit une extension. La zone de la plaque où l'effort qu'elle subit s'annule et change de signe est la surface neutre. Généralement, les surfaces neutre et moyenne sont confondues. Dans le cas de structures telles que les poutres (que nous considérerons rectangulaires), cette notion de surface dégénère en une notion de ligne moyenne (ou neutre).

Géométrie



Deux types de mouvements existent : compression et flexion. Dans la suite, on ne considérera que des mouvements de flexion qui ne dépendent que des coordonnées x et y.

équation de mouvement de flexion des plaques

Le mouvement de flexion de la plaque est décrit par l'équation de Kirchhoff :

$$D\Delta^2 u - \rho_p h\omega^2 u = f_z$$

E est le module d'Young (en Pa), ν le coefficient de Poisson et ρ la masse volumique[5]. $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ est la rigidité à la flexion des plaques minces

- plaque libre :

$$-D\left(\Delta u - (1-\nu)\partial_l^2 u\right) = 0 \text{ et } -D\left(\partial_n \Delta u + (1-\nu)\partial_l\left(\partial_n \partial_l u\right)\right) = 0 ;$$

- plaque appuyée :

$$u = 0 \text{ et } -D\left(\Delta u - (1-\nu)\partial_l^2 u\right) = 0 ;$$

- plaque encastrée :

$$u = 0 \text{ et } \partial_n u = 0.$$

5. Pour l'acier $E = 200$ Gpa, $\rho_0 = 8000$ kg/m^3, $\nu = 0,3$.
Pour le béton $E = 25$ Gpa, $\rho_0 = 2300$ kg/m^3, $\nu = 0,3$.
Pour le plâtre $E = 2,5$ Gpa, $\rho_0 = 800$ kg/m^3, $\nu = 0,13$.

équation de mouvement de flexion des plaques

L'expression exacte des conditions aux limites dépend de la géométrie

Encastrement pour une plaque circulaire ($\vec{n} = \vec{r}$) de diamètre R. On a : $\partial_n = \nabla \cdot \vec{n} = \nabla \cdot \vec{r} = \partial_r$.

$$u(r, \theta) = 0 \qquad \text{en } r = R, \forall \theta \in [0, 2\pi]$$
$$\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} = 0 \qquad \text{en } r = R, \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Appui pour une plaque rectangulaire de dimensions $\ell_x \times \ell_y$. Le vecteur tangent change sur chaque face :

$$u(x, y) = 0, \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{en } x = 0, \ell_x, \forall y \in [0, +\ell_y]$$
$$u(x, y) = 0, \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{en } y = 0, \ell_y, \forall x \in [0, +\ell_x]$$

Solution générale en coordonnées cartésiennes

On pose $k_p^4 = \rho_p h \omega^2 / D$ (relation de dispersion) et on cherche la solution de

$$\Delta^2 u_g(x,y) - k_p^4 u_g(x,y) = 0$$

comme solution de

$$\left(\Delta + (\imath k_p)^2\right)\left(\Delta + k_p^2\right) u_g(x,y) = 0$$

ainsi $u_g(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$ où

$$\left(\Delta + k_p^2\right) u_1 = 0, \left(\Delta + (\imath k_p)^2\right) u_2 = 0.$$

Calculons u_1. Pour ce faire, décomposons u_1 sous forme d'un produit de Laplace : $u_1(x,y) = X(x)Y(y)$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + k_p^2 X(x)Y(y) &= 0 \\ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k_p^2 &= 0, \end{aligned}$$

comme k_p est une constante indépendante de x et de y, il est évident que nous avons

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\alpha^2, \alpha \in \mathbb{C} \\ \frac{Y''(y)}{Y(y)} &= -\beta^2, \beta \in \mathbb{C} \\ \alpha^2 + \beta^2 &= k_p^2. \end{aligned}$$

Solution générale en coordonnées cartésiennes

$X(x)$ et $Y(y)$ sont solutions d'une équation de Helmholtz monodimensionnelle :

$$\begin{aligned} X(x) &= A\mathrm{e}^{\imath\alpha x} + B\mathrm{e}^{-\imath\alpha x} \\ Y(y) &= C\mathrm{e}^{\imath\alpha y} + D\mathrm{e}^{-\imath\alpha y} \\ \alpha^2 + \beta^2 &= k_p^2. \end{aligned}$$

u_2 se calcule en remplaçant k_p par $\imath k_p$, α par $\imath\alpha$ et β par $\imath\beta$.
Nous obtenons

$$\begin{aligned} u_g(x,y) &= A_1\mathrm{e}^{\imath(\alpha x+\beta y)} + B_1\mathrm{e}^{\imath(\alpha x-\beta y)} + C_1\mathrm{e}^{-\imath(\alpha x+\beta y)} + D_1\mathrm{e}^{-\imath(\alpha x-\beta y)} + \\ &\quad A_2\mathrm{e}^{\alpha x+\beta y} + B_2\mathrm{e}^{\alpha x-\beta y} + C_2\mathrm{e}^{-\alpha x+\beta y} + D_2\mathrm{e}^{-\alpha x-\beta y} \\ &= A_1 \sin\alpha x \sin\beta y + B_1 \sin\alpha x \cos\beta y + \\ &\quad C_1 \cos\alpha x \sin\beta y + D_1 \cos\alpha x \cos\beta y + \\ &\quad A_2 \sinh\alpha x \sinh\beta y + B_2 \sinh\alpha x \cosh\beta y + \\ &\quad C_2 \cosh\alpha x \sinh\beta y + D_2 \cosh\alpha x \cosh\beta y, \end{aligned}$$

où $\alpha^2 + \beta^2 = k_p^2$. La solution générale est composée de fonctions oscillantes et exponentielles.

Solution générale en coordonnées polaires

La procédure est identique. Cherchons u_1 solution de l'équation à nombre d'onde réel

$$\frac{\partial^2 u_1(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{\partial u_1(r,\theta)}{r\partial r} + \frac{\partial^2 u_1(r,\theta)}{r^2\partial\theta^2} + k_p^2 u_1(r,\theta) = 0$$

sous forme d'un produit de Laplace $u_1(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R(r)\Theta(\theta)}{\partial r^2} + \frac{\partial R(r)\Theta(\theta)}{r\partial r} + \frac{\partial^2 R(r)\Theta(\theta)}{r^2\partial\theta^2} + k_p^2 R(r)\Theta(\theta) &= 0 \\
\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{r^2\Theta(\theta)} + k_p^2 &= 0 \\
r^2\left\{\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + k_p^2\right\} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} &= 0.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\Theta''(\theta) + \alpha^2\Theta(\theta) &= 0 \\
R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(k_p^2 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)R(r) &= 0.
\end{aligned}$$

Solution générale en coordonnées polaires

La première équation se solutionne comme somme d'exponentielles complexes $e^{-\imath\alpha\theta}$. La $2-\pi$ périodicité en θ implique $\alpha = n, n \in N$ et la seconde comme une fonction de Bessel régulière.

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= A_{1n}e^{\imath n\theta} + A_{2n}e^{-\imath n\theta} \\ R(r) &= B_n J_n(k_p r). \end{aligned}$$

Soit, si A_n est une constante quelconque :

$$u_1(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n J_n(k_p r) e^{\imath n\theta}.$$

La deuxième famille de solution s'obtient en remplaçant k_p par $\imath k_p$:

$$u_2(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n J_n(\imath k_p r) e^{\imath n\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \imath^{-n} I_n(k_p r) e^{\imath n\theta}.$$

La solution générale de l'équation des plaques est donc donnée par

$$u_g(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{A_n J_n(k_p r) + B_n I_n(k_p r)\right\} e^{\imath n\theta}.$$

Somme de fonctions oscillantes ($J_n(z)$) et exponentielles ($I_n(z)$)

Noyau de Green

On cherche $G(M, M_0)$, solution de

$$D\Delta_M^2 G(M, M_0) - Dk_p^4 G(M, M_0) = \delta_{M_0}(M),$$

comme limite de $G_\epsilon(M, M_0)$ telle que

$$\Delta_M^2 G_\epsilon(M, M_0) - (k_p + \imath\epsilon)^4 G_\epsilon(M, M_0) = \frac{1}{D}\delta_{M_0}(M).$$

$G(M, M_0)$ se calcule par transformation de Fourier directe et inverse, pour une fonction bidimensionnelle purement radiale $f(r)$, données par

$$\begin{aligned} \hat{f}(\zeta) &= 2\pi \int_0^{+\infty} f(r) \mathrm{J}_0(2\pi\zeta r) r dr \\ f(r) &= \pi \int_{\mathrm{e}^{\imath\pi}\infty}^{+\infty} \hat{f}(\zeta) \mathrm{H}_0(2\pi\zeta r) \zeta d\zeta. \end{aligned}$$

Noyau de Green

Si r est la distance entre M et l'origine :

$$16\pi^4\zeta^4\,\hat{G}_\epsilon(\zeta) - (k_p + \imath\epsilon)^4\,\hat{G}_\epsilon(\zeta) = \frac{1}{D}.$$

Soit

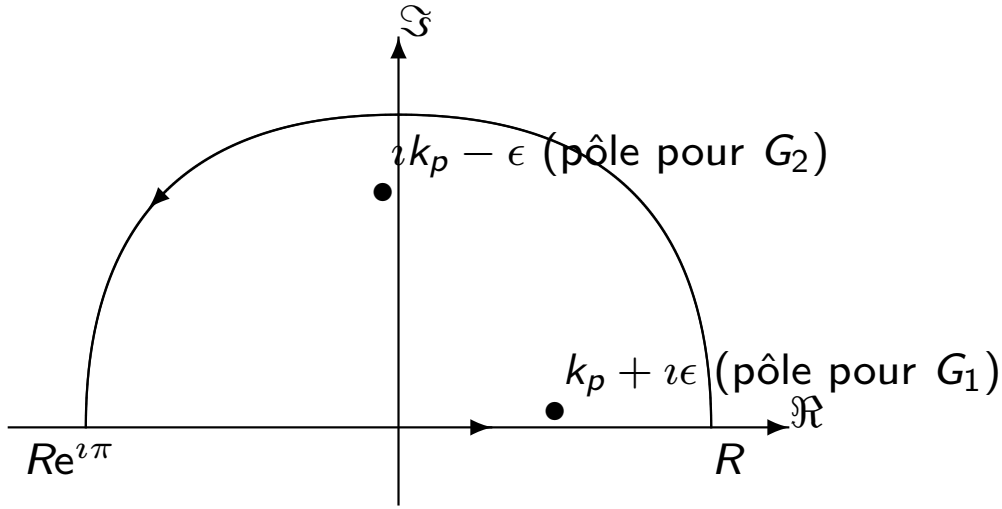
$$\begin{aligned} D\hat{G}_\epsilon(\zeta) &= \frac{1}{16\pi^4\zeta^4 - (k_p + \imath\epsilon)^4} \\ &= \frac{1}{2\,(k_p + \imath\epsilon)^2}\left(\frac{1}{4\pi^2\zeta^2 - (k_p + \imath\epsilon)^2} + \frac{-1}{4\pi^2\zeta^2 + (k_p + \imath\epsilon)^2}\right) \\ &= D\hat{G}_1(\zeta) + D\hat{G}_2(\zeta). \end{aligned}$$

Calculons $\hat{G}_1(\zeta)$ par transformée de Fourier inverse

$$G_1(r) = \frac{\pi}{2\,(k_p + \imath\epsilon)^2}\int_{\mathrm{e}^{\imath\pi}\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2\zeta^2 - (k_p + \imath\epsilon)^2}\mathrm{H}_0(2\pi\zeta r)\zeta\, d\zeta.$$

Noyau de Green

Calculons cette intégrale par la méthode des résidus sur le contour suivant



Le contour choisi ne contient que le pôle $2\pi\zeta = k_p + \imath\epsilon$. Le théorème des résidus s'applique sans difficulté particulière et nous obtenons

$$G_1(r) = \frac{\imath}{8\left(k_p + \imath\epsilon\right)^2} \mathrm{H}_0\left(\left(k_p + \imath\epsilon\right) r\right).$$

De méme pour G_2

$$G_2(r) = \frac{-\imath}{8\left(k_p + \imath\epsilon\right)^2} \mathrm{H}_0\left(\imath\left(k_p + \imath\epsilon\right) r\right).$$

Par passage à la limite $\epsilon \to 0$, nous obtenons finalement

$$G(r) = \frac{\imath}{8Dk_p^2}\left(\mathrm{H}_0\left(k_p r\right) - \mathrm{H}_0\left(\imath k_p r\right)\right).$$

Noyau de Green

La noyau de Green de l'équation des plaques est

$$G(M, M_0) = \frac{\imath}{8Dk_p^2} \left(\mathrm{H}_0 \left(k_p M M_0 \right) - \mathrm{H}_0 \left(\imath k_p M M_0 \right) \right).$$

Le comportement de ce noyau au voisinage de l'origine est :

$$\begin{aligned}
G(r) &\underset{r \to 0}{\to} \frac{\imath}{8Dk_p^2} \\
G'(r) &\underset{r \to 0}{\to} 0 \\
G''(r) &\underset{r \to 0}{\to} ctte \ \ln r \\
G'''(r) &\underset{r \to 0}{\to} ctte \ \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

La flèche de la plaque est bornée et sa pente à l'origine est nulle. Ce résultat traduit la symétrie de révolution que possède la plaque.

Plaques minces ; relation de dispersion

Cherchons les ondes libres qui se propagent dans la plaque (méthode de Laplace). Pour cela il suffit d'examiner le cas d'une onde qui se propage dans la direction de l'axe x : $u(x,y) = \mathrm{e}^{\imath kx}$. L'équation des plaques $\Delta^2 u(x,y) - k_p^4 u(x,y) = 0$ s'écrit alors $k^4 \mathrm{e}^{\imath kx} - k_p^4 \mathrm{e}^{\imath kx} = 0$. D'où $k^4 - k_p^4 = 0$ dont la solution est $k = \sqrt[4]{1} k_p$. Soit encore $k = \pm k_p$ et $k = \pm \imath k_p$. On retrouve bien la présence de quatre ondes : deux ondes propagatives et deux ondes à comportement exponentiel.

La vitesse de groupe (qui caractérise la propagation de l'énergie) est donnée par $v_g = \mathrm{d}\omega / \mathrm{d}k_p(\omega)$.
Comme $k_p^2 = \sqrt{(\rho_p h)/D}\omega$, on a par différentiation $2k_p dk_p = \sqrt{(\rho_p h)/D} d\omega$ et ainsi $v_g = 1/(\mathrm{d}k_p(\omega)/\mathrm{d}\omega)$. D'où

$$v_g = 2\sqrt[4]{D/(\rho_p h)}\sqrt{\omega}$$

Les plaques minces sont des milieux dispersifs dans lesquels la vitesse de propagation des ondes de flexion dépend de la fréquence. Ceci a des conséquences très importantes sur tout ce qui a trait au rayonnement : toute plaque possède une fréquence au delà de laquelle les ondes qui s'y propagent seront parfaitement couplées avec le fluide externe.

Plaque rectangulaire appuyée

Les conditions aux limites d'appui pour une plaque rectangulaire $\ell_x \times \ell_y$:

$$u(x,y) = 0, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{en } x = 0, \ell_x, \forall y \in [0, +\ell_y]$$
$$u(x,y) = 0, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{en } y = 0, \ell_y, \forall x \in [0, +\ell_x]$$

Afin de calculer les fréquences et modes propres, appliquons les conditions aux limites à la solution générale :

$$\begin{aligned} u(x,y) \quad = \quad & A_1 \sin\alpha x \sin\beta y + B_1 \sin\alpha x \cos\beta y + C_1 \cos\alpha x \sin\beta y + D_1 \cos\alpha x \cos\beta y \\ & + A_2 \sinh\alpha x \sinh\beta y + B_2 \sinh\alpha x \cosh\beta y \\ & + C_2 \cosh\alpha x \sinh\beta y + D_2 \cosh\alpha x \cosh\beta y. \end{aligned}$$

Les conditions en $x = 0$ nous conduisent à

$$\begin{aligned} C_1 \sin\beta y + D_1 \cos\beta y + C_2 \sinh\beta y + D_2 \cosh\beta y &= 0 \\ \alpha^2 \left(-C_1 \sin\beta y - D_1 \cos\beta y + C_2 \sinh\beta y + D_2 \cosh\beta y\right) &= 0 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} C_1 \sin\beta y &= -D_1 \cos\beta y \\ C_2 \sinh\beta y &= -D_2 \cosh\beta y. \end{aligned}$$

D'où, si nous reportons ces résultats dans l'expression de la solution générale $u(x,y)$:

$$u(x,y) = A_1 \sin\alpha x \sin\beta y + B_1 \sin\alpha x \cos\beta y + A_2 \sinh\alpha x \sinh\beta y + B_2 \sinh\alpha x \cosh\beta y.$$

Plaque rectangulaire appuyée

De même, les conditions en $y = 0$ nous conduisent à

$$\begin{aligned} B_1 \sin \alpha x + B_2 \sinh \alpha x &= 0 \\ -B_1 \sin \alpha x + B_2 \sinh \alpha x &= 0, \end{aligned}$$

D'où $B_1 = B_2 = 0$. Soit :

$$u(x, y) = A_1 \sin \alpha x \sin \beta y + A_2 \sinh \alpha x \sinh \beta y.$$

Les conditions aux limites en $x = \ell_x$ conduisent à :

$$\begin{aligned} A_1 \sin \alpha \ell_x \sin \beta y + A_2 \sinh \alpha \ell_x \sinh \beta y &= 0 \\ -A_1 \sin \alpha \ell_x \sin \beta y + A_2 \sinh \alpha \ell_x \sinh \beta y &= 0 \end{aligned}$$

soit $A_1 \sin \alpha \ell_x \sin \beta y = 0$ et $A_2 \sinh \alpha \ell_x \sinh \beta y = 0$, $\forall y \in]0, +\ell_y[$. De là, il est évident que nous avons

$$\sin \alpha \ell_x = 0 \text{ ou } A_1 = 0 \text{ et } \sinh \alpha \ell_x = 0 \text{ ou } A_2 = 0.$$

Les conditions aux limites en $y = \ell_y$ conduisent à un rrsultat similaire.

$$\sin \beta \ell_y = 0 \text{ ou } B_1 = 0 \text{ et } \sinh \beta \ell_y = 0 \text{ ou } B_2 = 0.$$

La nullité des sinus hyperboliques ne peut se réaliser que si $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ ce qui correspond à une solution $u(x, y)$ nulle partout et est bien évidemment à rejeter et donc on fixe $A_2 = 0$ et $B_2 = 0$.

Plaque rectangulaire appuyée

Il est alors évident que les conditions aux limites conduisent à des résultats non identiquement nuls si et seulement si les termes en sinus sont nuls. Soit donc $\alpha \ell_x = m\pi$, $m \in N^\star$ et $\beta \ell_y = n\pi$, $n \in N^\star$. Les nombres d'onde propres de la plaque rectangulaire à bord appuyés sont ainsi donnés par

$$k_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{\ell_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_y}\right)^2}.$$

Les fréquences propres correspondantes sont, avec $\omega_{mn} = \sqrt{D/\rho_p h} k_{mn}^2$ données par

$$f_{mn} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{D}{\rho_p h}}\left(\left(\frac{m}{\ell_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{\ell_y}\right)^2\right).$$

L'expression des modes propres est donnée par (après normalisation des modes) :

$$u_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{\ell_x \ell_y}} \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{\ell_y}\right).$$

Noyau de Green de la plaque rectangulaire appuyée

On cherche $G(M, M')$, solution du problème aux limites

$$\begin{aligned} \Delta_M^2 G(M, M') - k_p^4 G(M, M') &= \frac{1}{D}\delta_{M'}(M), \text{ sur la plaque} \\ G(M, M') &= 0, \text{ au bord} \\ \Delta_M G(M, M') - (1-\nu)\partial_{\ell 2}^2 G(M, M') &= 0, \text{ au bord} \end{aligned}$$

par développement sur la base des modes propres

$$G(M, M') = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} u_{mn}(x, y),$$

α_{mn} dépendent de x' et y'. On a

$$\Delta_M^2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} u_{mn}(x, y) - k_p^4 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} u_{mn}(x, y) = \frac{1}{D}\delta_{M'}(M),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} \left[\Delta_M^2 u_{mn}(x, y) - k_p^4 u_{mn}(x, y)\right] = \frac{1}{D}\delta_{M'}(M),$$

Noyau de Green de la plaque rectangulaire appuyée

Par définition des modes propres $\Delta_M^2 u_{mn}(x,y) = k_{mn}^4 u_{mn}(x,y)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn}\left(k_{mn}^4 - k_p^4\right) u_{mn}(x,y) = \frac{1}{D}\delta_{M'}(M),$$

On multiplie les deux membres de cette équation par $u_{rs}(x,y)$
On intègre sur la surface de la plaque.
Comme les modes sont orthonormés, si $k_{rs} \neq k_p$, on obtient

$$\alpha_{rs} = \frac{1}{D}\frac{u_{rs}(x',y')}{\left(k_{rs}^4 - k_p^4\right)}.$$

D'où

$$G\left(M,M'\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_{mn}(x',y')u_{mn}(x,y)}{D\left(k_{mn}^4 - k_p^4\right)},$$

De plus $k_p^4 = \rho_p h\omega^2/D$ et $k_{mn}^4 = \rho_p h\omega_{mn}^2/D$. Nous obtenons finalement

$$G\left(M,M'\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_{mn}(x',y')u_{mn}(x,y)}{\rho_p h\left(\omega_{mn}^2 - \omega^2\right)},$$

Sauf en $\omega = \omega_{mn}$.

Noyau de Green de la plaque rectangulaire appuyée

Comment faire pour $\omega = \omega_{mn}$?

On définit un module d'Young complexe $\hat{E} = E(1 - \imath\eta)$, où $\eta \in [0,0001; 0,1]$ est le facteur d'amortissement du matériau.

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Eh^3}{\rho_0 h 12(1-\nu^2)} \left(\left(\frac{m\pi}{\ell_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_y} \right)^2 \right)^2$$

On définit les pulsations propres complexes $\hat{\omega}_{mn}$ comme $\hat{\omega}_{mn}^2 = \omega_{mn}^2(1 - \imath\eta)$ et le développement modal s'écrit simplement

$$G\left(M, M'\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{mn} u_{mn}(x,y)}{\rho_p h \left(\omega_{mn}^2(1-\imath\eta) - \omega^2\right)},$$

qui est défini pour toute fréquence d'excitation.

Seules les plaques dont deux bords opposés sont appuyés permettent d'obtenir des résultats "exacts", tous les autres cas de figure, les méthodes analytiques donneront des résultats approchés.

Plaque circulaire encastrée

On peut définir fréquences et modes propres pour les trois types de condition aux limites.
Elle occupe un domaine défini en coordonnées polaires $(0, r, \theta)$ par $0 \leq r < R$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Cette plaque est supposée encastrée sur tout son pourtour.
Les conditions aux limites sont données par l'annulation du déplacement et de sa dérivée normale au bord. Nous avons donc à résoudre

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(r,\theta) - \frac{\omega^2 \rho_0 h}{D} u(r,\theta) &= 0, r \in [0, R[, \theta \in [0, 2\pi[\\ u(r,\theta) &= 0, r = R, \theta \in [0, 2\pi[\\ \partial_n u(r,\theta) &= 0, r = R, \theta \in [0, 2\pi[. \end{aligned}$$

où $\partial_n u(r,\theta) = \partial_r u(r,\theta)$.
Solution générale en coordonnées polaires :

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ A_n \mathrm{J}_n(k_p r) + B_n \mathrm{I}_n(k_p r) \right\} \mathrm{e}^{\imath n\theta}.$$

Conditions aux limites $\Rightarrow$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ A_n \mathrm{J}_n(k_p R) + B_n \mathrm{I}_n(k_p R) \right\} \mathrm{e}^{\imath n\theta} = 0, \theta \in [0, 2\pi[$$

$$-k_p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ A_n \mathrm{J}'_n(k_p R) + B_n \mathrm{I}'_n(k_p R) \right\} \mathrm{e}^{\imath n\theta} = 0, \theta \in [0, 2\pi[,$$

Plaque circulaire encastrée

Pour tout n :

$$\begin{aligned} A_n \mathrm{J}_n(k_p R) + B_n \mathrm{I}_n(k_p R) &= 0 \\ A_n \mathrm{J}'_n(k_p R) + B_n \mathrm{I}'_n(k_p R) &= 0, \end{aligned}$$

Solution non nulle ssi son déterminant est nul :

$$\mathrm{J}_n(k_p R)\mathrm{I}'_n(k_p R) - \mathrm{I}_n(k_p R)\mathrm{J}'_n(k_p R) = 0.$$

$\forall n$ on aune infinité de valeurs réelles :

$k_{mn}R$	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$n=0$	3,1962	6,3064	9,4394	12,577	15,7163
$n=1$	4,6108	7,7987	10,9581	14,1088	17,2560
$n=2$	5,9059	9,213	12,402	15,5791	18,7451
$n=3$	7,144	3,3181	13,7949	17,0050	20,920
$n=4$	8,3466	11,8367	15,1498	18,3959	21,6069

avec, $k_{m0}R \to (m+1)\pi, m \gg 1$

Plaque circulaire encastrée

Modes propres. On fixe une constante (eg B_n)

$$\frac{A_n}{B_n} = -\frac{\mathrm{I}_n(k_p R)}{\mathrm{J}_n(k_p R)}.$$

Les modes propres s'écrivent, pour $k_p = k_{mn}$, en fonction de A_n

$$u_{mn}(r,\theta) = \frac{A_{mn}}{\mathrm{I}_n\left(k_{mn}R\right)}\left\{\mathrm{I}_n\left(k_{mn}R\right)\mathrm{J}_n\left(k_{mn}r\right) - \mathrm{J}_n\left(k_{mn}R\right)\mathrm{I}_n\left(k_{mn}r\right)\right\}\mathrm{e}^{\imath n\theta}.$$

L'orthonormalité (et le calcul de A_n) de ces modes propres se démontre en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel.
Le produit scalaire sur un domaine circulaire est :

$$\langle u_{mn}, u_{pq}\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^R u_{mn}(r,\theta)u_{pq}^{\star}(r,\theta)rdrd\theta,$$

où $f^{\star}$ est le conjugué de f.

Plaque quelconque

Ici commencent vraiment les difficultés !

Formule de Green pour les plaques
Ω le domaine de la plaque. u et v, deux fonctions nulles à l'extérieur de Ω.
Densité d'énergie potentielle interne de la plaque $a(u, v)$:

$$a(u,v) = D\int_\Omega \Delta u \Delta v + 2(1-\nu)\left(u_{,12}v_{,12} - u_{,11}v_{,22} - u_{,22}v_{,11}\right).$$

x_1 et x_2 : variables d'espace.
Deux intégrations par parties (un peu technique) :
Première :

$$a(u,v) = D\int_\Omega \left(\Delta^2 u\right) v + \int_{\partial\Omega} (\ell_1 u)\,\partial_n v - (\ell_2 u)\,v,$$

où $\ell_1 u = D(\Delta u - (1-\nu)\partial_l^2 u)$ et $\ell_2 u = D(\partial_n \Delta u + (1-\nu)\partial_l(\partial_n \partial_l u))$
Seconde :

$$a(u,v) = D\int_\Omega \left(\Delta^2 v\right) u + \int_{\partial\Omega} (\ell_1 v)\,\partial_n u - (\ell_2 v)\,u,$$

Par différence des deux expressions, nous obtenons la formule de Green de l'opérateur des plaques :

$$D\int_\Omega \left(\Delta^2 v\right) u - \left(\Delta^2 u\right) v = + \int_{\partial\Omega} (\ell_1 v)\,\partial_n u - (\ell_1 u)\,\partial_n v - (\ell_2 v)\,u + (\ell_2 u)\,v,$$

Plaque quelconque

Représentation de Green pour les plaques

$G(M, M')$ le noyau de Green de l'équation des plaques. Construisons l'ensemble des solutions de

$$D\left(\Delta^2 - k_p^4\right) u(M) = F(M), M \in \Omega$$

Appliquons la formule de Green à $u(M')$ et $G(M, M')$. Il vient

$$\begin{aligned} & D\int_\Omega \left(\Delta^2 u\left(M'\right)\right) G\left(M, M'\right) - \left(\Delta_{M'}^2 G\left(M, M'\right)\right) u\left(M'\right) \pm k_p^4 u\left(M'\right) G\left(M, M'\right) \\ = & \int_{\partial\Omega} \left(\ell_1 u\left(S\right)\right) \partial_{n(S)} G\left(M, v\right) - \int_{\partial\Omega} \left(\ell_{1S} G\left(M, S\right)\right) \partial_n u\left(S\right) \\ & - \int_{\partial\Omega} \left(\ell_2 u\left(S\right)\right) G\left(M, S\right) + \int_{\partial\Omega} \left(\ell_{2S} G\left(M, S\right)\right) u\left(S\right), S \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Nous avons par définition :

$$\begin{aligned} D\int_\Omega \left(\Delta^2 u\left(M'\right) - k_p^4 u\left(M'\right)\right) G\left(M, M'\right) &= \int_\Omega F\left(M'\right) G\left(M, M'\right) \\ D\int_\Omega \left(\Delta_{M'}^2 G\left(M, M'\right) - k_p^4 G\left(M, M'\right)\right) u\left(M'\right) &= \int_\Omega \delta_M\left(M'\right) u\left(M'\right) = u(M) \end{aligned}$$

Plaque quelconque

La représentation intégrale du déplacement est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned} u(M) &= u_0(M) \\ &\quad + D\int_{\partial\Omega} \left(\ell_1 u(S)\right) \partial_{n(S)} G(M,S) - \left(\ell_2 u(S)\right) G(M,Sv) \\ &\quad - D\int_{\partial\Omega} \left(\ell_{1S} G(M,S)\right) \partial_n u(S) - \left(\ell_{2S} G(M,S)\right) u(S)\,, M \in \Omega, S \in \partial\Omega \end{aligned}$$

où $u_0(M) = \int_\Omega F(M')\, G(M,M')$ est le terme de source qui est connu.

Il reste à déterminer les quatre fonctions inconnues :

$$\ell_1 u(S)\,, \ell_2 u(S)\,, \partial_n u(S) \text{ et } u(S)\,, S \in \partial\Omega$$

qui sont les valeurs du déplacement et de ses dérivées successives au bord du domaine.

Les conditions aux limites imposées par le problème en fixent deux. Pour fixer les idées prenons $\partial_n u(S) = 0$ et $u(S) = 0$ pour $S \in \partial\Omega$

Plaque quelconque

$$u(M) = u_0(M) + D \int_{\partial\Omega} (\ell_1 u(S))\, \partial_{n(S)} G(M,S) - (\ell_2 u(S))\, G(M,S)$$

où $M \in \Omega$ et $S \in \partial\Omega$

Pour déterminer les deux autres, il suffit d'écrire à nouveau $u(Q) = 0$ et $\partial_n u(Q) = 0$ pour $Q \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} u_0(Q) &= -D \int_{\partial\Omega} (\ell_1 u(S))\, \partial_{n(S)} G(Q,S) - (\ell_2 u(S))\, G(Q,S) \\ \partial_n u_0(Q) &= -D \int_{\partial\Omega} (\ell_1 u(S))\, \partial_{n(S)}\partial_{n(Q)} G(Q,S) - (\ell_2 u(S))\, \partial_{n(Q)} G(Q,S) \end{aligned}$$

où $Q, S \in \partial\Omega$. On obtient un système de deux équations intégrales de frontières à deux inconnues $(\ell_1 u(S))$ et $(\ell_2 u(S))$.

Que l'on résout numériquement (par exemple par méthode de collocation ou de Galerkin).

Vibroacoustique
(interaction structure vibrante - fluide immobile)

Une grande partie des sources sonores peut/doit être décrite dans le cadre du couplage fluide-structure. Dans la ville et le milieu industriel, la plupart des nuisance sonores sont issues d'un couplage entre la vibration d'une structure mécanique et le fluide qui l'entoure.

Une salle parfaitement étanche de 3m de côté dont une des faces est occupée par une vitre de surface $S = 1$ m^2 qui vibre avec une amplitude U de 0,1 mm produit un champ acoustique interne qui ne dépend que du volume de la salle V_0 et de la variation de volume qu'induit le mouvement de la paroi V'.

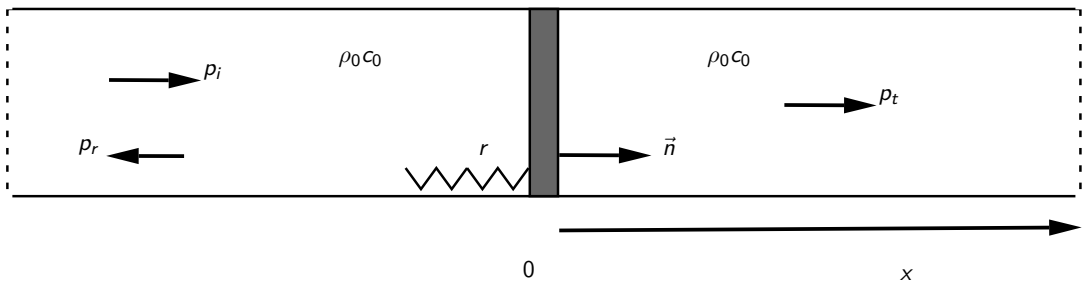
La loi de barotropie lie la pression dans un gaz parfait p avec sa masse volumique ρ est $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$.

On a $\rho_0 = \rho_0 + \rho'$ et $p = p_0 + p' \Rightarrow p' = \gamma p_0 \rho'/\rho_0$. La quantité de matière contenue dans la salle étanche ne variant pas au cours du mouvement, on a si V_0 est le volume de la salle $\rho'/\rho_0 = V'/V_0$.

On a ainsi $p' = \gamma p_0 V'/V_0 = 1,4 \times 10^5 \times 0,0001/3^3$ soit un niveau sonore d'environ 88 dB ! En pratique, il est à noter que de tels niveaux n'apparaissent que dans les salles parfaitement étanches et que la moindre fuite limite considérablement le niveau sonore.

Un exemple simple

Considérons un guide d'onde infini de section unitaire constante. En $x = 0$, le guide comporte une "cloison" constituée d'une paroi mince (devant la longueur d'onde) de masse m et suspendue à un ressort de raideur r. De part et d'autre de la cloison, le guide est rempli d'un fluide parfait de masse volumique ρ_0 et de célérité du son c_0. Cette paroi sépare le guide en deux régions "étanches" (le fluide ne peut pas traverser la cloison). En outre, nous supposons que seules des ondes planes peuvent se propager parallèlement à l'axe du guide.



Géométrie du guide d'onde 1D

Soit $f(\omega)$, la force qui agit sur la cloison et $u(\omega)$ son déplacement. U est solution de l'équation scalaire du système masse-ressort

$$-m\omega^2 u + ru = f.$$

La force f est composée d'une force extérieure f_e et de la force due à la différence de pressions acoustiques f_p. On a $f = f_e - f_p$. La force f_e est une force injectée au système, elle apporte donc de l'énergie son signe est positif. La force de pression f_p est une force qui est perdue par la cloison son signe est donc négatif.

Un exemple simple

Soit S^- une source acoustique placée dans les demi-guides $x > 0$ et $x < 0$. p^+ et p^- sont les pressions acoustiques qui règnent dans les deux demi-guides. Nous avons alors si $f_p = p^+(0) - p^-(0)$:

$$\begin{aligned} -m\omega^2 u + ru &= f_e - p^+(0) + p^-(0) \\ \frac{d^2 p^+(x)}{dx^2} + k^2 p^+(x) &= 0 \text{ dans } x > 0 \\ \frac{d^2 p^-(x)}{dx^2} + k^2 p^-(x) &= s^-(x) \text{ dans } x < 0. \end{aligned}$$

À ces équations se rajoute l'équation de continuité des accélérations normales $\omega^2 \rho_0 u = p^{\pm\prime}(x = 0)$. La première équation ci-dessus fait apparaître une pulsation particulière $\omega_0 = \sqrt{r/m}$, est la pulsation propre de la cloison.
si f_e est nul, la seule excitation est due au champ sonore, et on est dans le cas de la transparence de cloisons. S'il n'y a pas de sources au sein du fluide, on se retrouve dans le cas du rayonnement acoustique.

Rayonnement acoustique

On suppose : $s^-(x) = 0$, $f_e \neq 0$.

Seules les ondes acoustiques créées par la cloison se propagent dans $x > 0$ et $x < 0$.

$p^{\pm}(x)$: solutions de $(p''(x) + k^2 p(x) = 0)$

Par Sommerfeld : les ondes s'éloignent de la paroi. Donc $p^{\pm}(x) = A^{\pm} \mathrm{e}^{\pm \imath kx}$.
EXERCICE.

Montrer que dans le domaine $x > 0$, l'onde propagative est donnée par $p^+(x, \omega) = A^+ \exp^{\imath kx}$.
SOLUTION . La solution de l'équation de Helmholtz est : $p^+(x, \omega) = A^+ \exp^{\imath kx} + B^+ \exp^{-\imath kx}$.

En temporel

$$\begin{aligned} P^+(x,t) &= p^+(x,\omega)\mathrm{e}^{-\imath\omega t} = A^+ \exp^{\imath kx} + B^+ \exp^{-\imath kx} \mathrm{e}^{-\imath\omega t} \\ P^+(x,t) &= A^+ \mathrm{e}^{-\imath\omega(t-x/c_0)} + B^+ \mathrm{e}^{-\imath\omega(t+x/c_0)} \end{aligned}$$

Au cours du temps $\Delta t > 0$, on a deux ondes qui se déplacent, une vers les $x > 0$ ($\Rightarrow \Delta x > 0$) et l'autre vers les $x < 0$ ($\Rightarrow \Delta x < 0$).

L'onde qui garde la phase (l'argument de l'exponentielle) constante pour $\Delta x > 0$ est celle dont la phase est donnée par $\Delta t - \Delta x / c_0 = ctte$. l'onde propagative dans $x > 0$ correspond donc à $\exp^{\imath kx}$. De même, dans $x < 0$, l'onde propagative correspond à $\exp^{-\imath kx}$.

Rayonnement acoustique

Les équations de continuité des vitesses normales s'écrivent :

$$\omega^2 \rho_0 u = \frac{dp^{\pm}(0)}{dx} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \omega^2 \rho_0 u & = & p^{+\prime}(0) \\ \omega^2 \rho_0 u & = & p^{-\prime}(0). \end{array} \right.$$

Le système à résoudre s'écrit donc

$$\begin{array}{rcl} -m(\omega^2 - \omega_0^2)u & = & f_e - p^+(0) + p^-(0) \\ \omega^2 \rho_0 u & = & p^{+\prime}(0) \\ \omega^2 \rho_0 u & = & p^{-\prime}(0). \end{array}$$

Comme $p^{\pm}(x) = A^{\pm} \mathrm{e}^{\pm kx}$, les inconnues sont alors u, A^+ et A^- et sont solutions du système suivant :

$$\begin{array}{rcl} A^+ - A^- - m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) u & = & f_e \\ \imath k A^+ - \omega^2 \rho_0 u & = & 0 \\ -\imath k A^- - \omega^2 \rho_0 u & = & 0. \end{array}$$

Rayonnement acoustique

Nous obtenons un système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m\left(\omega^2-\omega_0^2\right) \\ 1 & 0 & +\imath\omega\rho_0 c_0 \\ 0 & 1 & -\imath\omega\rho_0 c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant $D = -2m(\imath\omega\rho_0 c_0/m + \omega^2 - \omega_0^2)$ ne s'annule jamais.

$$\begin{aligned} u &= -f_e \frac{1}{m\left(2\imath\omega\frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2\right)} \\ A^{\pm} &= \pm f_e \frac{\imath\omega\frac{\rho_0 c_0}{m}}{2\imath\omega\frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2}. \end{aligned}$$

- u et $A^{\pm}$ sont maximaux pour $\omega = \omega_0$
- $|p^+(x)| = |p^-(x)$
- $p^+(x) = -p^-(x) = \exp(\imath\pi)p^-(x)$

Approximation “fluide léger”

Soit $\epsilon = \rho_0 c_0 / m \ll 1$.

Suppose que u et $A^{\pm}$ se développent en série de puissances croissantes de ϵ :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + +\mathcal{O}(\epsilon^3) \\ A^{\pm} &= A_0^{\pm} + \epsilon A_1^{\pm} + \epsilon^2 A_2^{\pm} + +\mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Repartons du système d'équations initiales

$$\begin{aligned} A^+ - A^- - m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) u &= f_e \\ \imath k A^+ - \omega^2 \rho_0 u &= 0 \\ -\imath k A^- - \omega^2 \rho_0 u &= 0. \end{aligned}$$

Dans lequel nous mettons en évidence $\epsilon = \rho_0 c_0 / m$. Par exemple
Prenons $\imath k A^+ - \omega^2 \rho_0 u = 0$

- On divise par $\imath k \Rightarrow A^+ + \imath \rho_0 c_0 \omega u = 0$

On divise par $m \Rightarrow A^+/m + \imath \epsilon \omega u = 0$

Approximation "fluide léger"

$$\begin{aligned} A^+/m - A^-/m - \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) u &= f_e/m \\ A^+/m + \imath\epsilon\omega u &= 0 \\ A^-/m - \imath\epsilon\omega u &= 0 \end{aligned}$$

Portons-y les développements en série de perturbation à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \frac{A_0^+ + \epsilon A_1^+}{m} - \frac{A_0^- + \epsilon A_1^-}{m} - \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)(u_0 + \epsilon u_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= \frac{f_e}{m} \\ \frac{A_0^+ + \epsilon A_1^+}{m} + \imath\epsilon\omega(u_0 + \epsilon u_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0 \\ \frac{A_0^- + \epsilon A_1^-}{m} - \imath\epsilon\omega(u_0 + \epsilon u_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0. \end{aligned}$$

On regroupe les termes de même puissance de ϵ

$$\begin{aligned} \frac{A_0^+}{m} - \frac{A_0^-}{m} - \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) u_0 + \epsilon\left\{\frac{A_1^+}{m} - \frac{A_1^-}{m} - \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) u_1\right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= \frac{f_e}{m} \\ \frac{A_0^+}{m} + \epsilon\left\{\frac{A_1^+}{m} + \imath\omega u_0\right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0 \\ \frac{A_0^-}{m} + \epsilon\left\{\frac{A_1^-}{m} - \imath\omega u_0\right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0. \end{aligned}$$

On égale les termes des puissances identiques de ϵ.

Approximation "fluide léger"

Pour justifier ceci, prenons $\epsilon \to 0$ dans le système précédent. Nous obtenons le système à l'ordre 0 en ϵ :

$$\begin{aligned} A_0^+/m - \frac{A_0^-}{m} - \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) u_0 &= f_e/m \\ A_0^+/m &= 0 \\ A_0^-/m &= 0. \end{aligned}$$

Si nous reportons ce résultat dans le système précédent, nous obtenons

$$\begin{aligned} \epsilon \left\{ A_1^+/m - A_1^-/m - \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) u_1 \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0 \\ \epsilon \left\{ A_1^+/m + \imath\omega u_0 \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0 \\ \epsilon \left\{ A_1^-/m - \imath\omega u_0 \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0. \end{aligned}$$

On divise par ϵ et prenons encore $\epsilon \to 0$ nous obtenons le système à l'ordre 1 en ϵ.

$$\begin{aligned} A_1^+/m - A_1^-/m - \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) u_1 &= 0 \\ A_1^+/m + \imath\omega u_0 &= 0 \\ A_1^-/m - \imath\omega u_0 &= 0. \end{aligned}$$

Approximation "fluide léger"

- solution pour ϵ^0

$$\begin{aligned} A_0^{\pm} &= 0 \\ u_0 &= -f_e/m(\omega^2 - \omega_0^2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ solution en l'absence de fluide : nullité de la pression acoustique et cloison dans le vide

- solution pour ϵ^1

Le système à l'ordre 1 se résout en fonction de la solution à l'ordre 0.

$$\begin{aligned} A_1^{\pm} &= \mp \imath m\omega u_0 = \pm \frac{\imath\omega f_e}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ u_1 &= \frac{A_1^+ - A_1^-}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} = -\frac{2\imath\omega u_0}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{2\imath\omega f_e}{m(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ solution corrective : pression acoustique rayonnée par la cloison dans le vide et déplacement correspondant à la force due à la différence de pression acoustique

Approximation "fluide léger"

On peut montrer qu'à l'ordre 2,

$$\begin{aligned} A_2^{\pm} &= \mp \imath m\omega u_1 \\ u_2 &= \frac{A_2^+ - A_2^-}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{-2\imath\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} u_1, \end{aligned}$$

qui se généralise à

$$u_m = \frac{-2\imath\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} u_{m-1} = \left(\frac{-2\imath\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^m u_0.$$

Nous obtenons ainsi le développement $u = \sum_m \epsilon^m u_m$

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sum_m \left(-2\epsilon\imath\omega/(\omega^2 - \omega_0^2) \right)^m, \text{ or } \sum_m (-x)^m = \frac{1}{1+x}, \\ u &= \frac{u_0}{1 + 2\epsilon\imath\omega/(\omega^2 - \omega_0^2)} \\ &= -\frac{f_e}{m(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\epsilon\imath\omega)}. \end{aligned}$$

le développement en série de perturbation, lorsqu'il peut être poussé aussi loin que l'on veut, conduit à la solution exacte.

Approximation “fluide léger”

En général une série asymptotique diverge et, pour une valeur fixée des paramètres, on ne retient qu'un nombre fini de termes.

Remarquons que, plus que ϵ, ces développements font intervenir le rapport

$$\eta = \frac{\epsilon}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

La condition de convergence de ces développements porte sur η et non sur ϵ.
La nuance est importante car au voisinage de la pulsation propre de la paroi, η peut être très grand alors que ϵ peut être très petit. Ces calculs sont donc valables “loin” de la fréquence propre de la cloison.

Notons que la méthode qui consiste à résoudre un problème de couplage fluide-structure en négligeant l'influence du fluide sur le déplacement et en calculant la pression rayonnée par la structure à partir de son déplacement dans le vide est couramment utilisée (sans toujours recevoir de justification rigoureuse comme celle proposée ci-dessus...).

Transparence de cloisons

Pour simplifier l'exposé, nous pouvons supposer qu'il n'y a pas de sources acoustiques dans $x < 0$ mais que la pression acoustique p^- est la somme d'une onde plane d'amplitude unité $e^{\imath kx}$ (la source s^- est rejetée à l'infini) et d'une onde réfléchie par la paroi à déterminer p_r. Nous avons donc $p^- = e^{\imath kx} + p_r$. Les pressions acoustiques $p^{\pm}(x)$ vérifient toutes deux une équation de Helmholtz homogène. Le principe de conservation de l'énergie implique que nous ayons :

$$p_r(x,\omega) = R(\omega)e^{-\imath kx} \text{ et } p^+(x,\omega) = T(\omega)e^{\imath kx}.$$

C'est à dire d'une onde réfléchie par la cloison qui se dirige vers les $x < 0$ et d'une onde transmise qui se dirige vers les $x > 0$. Déterminons $u(\omega)$, $R(\omega)$ le coefficient de réflexion et $T(\omega)$ le coefficient de transmission. L'équation du système masse-ressort s'écrit

$$-m\omega^2 u + ru = -p^+(0) + p^-(0) \Rightarrow m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)u + R - T = -1.$$

Les équations de continuité des accélérations normales s'écrivent :

$$\omega^2\rho_0 u = \frac{dp^{\pm}(0)}{dx} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \omega^2\rho_0 u - \imath kT & = & 0 \\ \omega^2\rho_0 u - \imath k(1-R) & = & 0. \end{array} \right.$$

EXERCICE. calculer u, R et T.

Transparence de cloisons

Nous obtenons encore un système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m\left(\omega^2-\omega_0^2\right) \\ 1 & 0 & -\imath\omega\rho_0 c_0 \\ 0 & -1 & -\imath\omega\rho_0 c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ T \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de déterminant $D = -m(2\imath\omega\rho_0 c_0/m + \omega^2 - \omega_0^2) \neq 0$.

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -1 & -1 & m\left(\omega^2-\omega_0^2\right) \\ 1 & 0 & -\imath\omega\rho_0 c_0 \\ 0 & -1 & -\imath\omega\rho_0 c_0 \end{vmatrix} = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\imath\omega\frac{\rho_0 c_0}{m}+\omega^2-\omega_0^2} \\ T &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & -1 & m\left(\omega^2-\omega_0^2\right) \\ 1 & 1 & -\imath\omega\rho_0 c_0 \\ 0 & 0 & -\imath\omega\rho_0 c_0 \end{vmatrix} = \frac{2\imath\omega\rho_0 c_0}{2\imath\omega\rho_0 c_0+m\left(\omega^2-\omega_0^2\right)} \\ u &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-2}{2\imath\omega\rho_0 c_0+m\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}. \end{aligned}$$

Si $\omega = \omega_0$ alors $R = 0$, $T = 1$, $u = 1/(\imath\omega_0\rho_0 c_0)$. La cloison transmet toute l'énergie de l'onde incidente. La cloison est transparente aux ondes acoustiques.

Transparence de cloisons

τ est le rapport entre le puissance moyenne (sur une période) de l'énergie transmise par la cloison et la puissance moyenne incidente (ici unitaire). Nous avons $\tau = TT^\star$. Soit

$$\tau = \frac{4\omega^2 \left(\frac{\rho_0 c_0}{m}\right)^2}{4\omega^2 \left(\frac{\rho_0 c_0}{m}\right)^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}.$$

Si $\epsilon = \rho_0 c_0 / m \ll 1$, nous avons :

$$\tau = \frac{4\omega^2\epsilon^2}{4\omega^2\epsilon^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2} = \frac{4\epsilon^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2} + \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

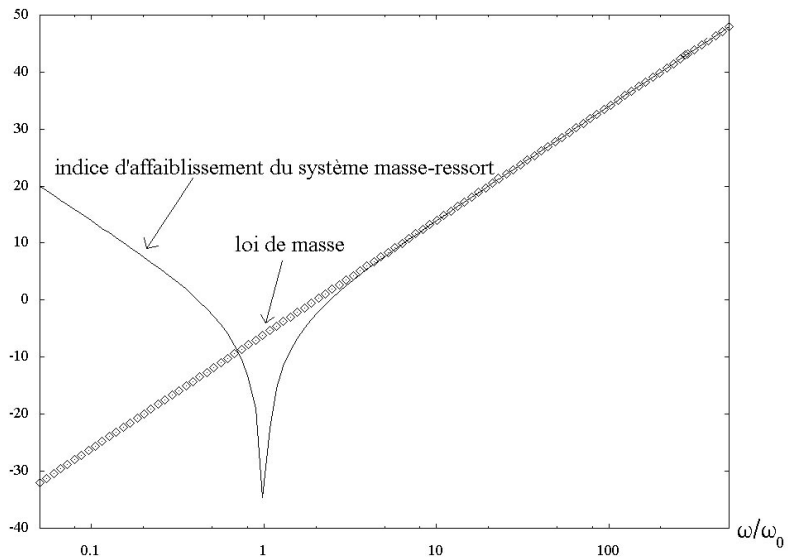
Supposons en outre que la fréquence d'excitation soit suffisamment haute pour avoir $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ll 1$. Nous avons alors

$$\tau \simeq \frac{4\rho_0^2 c_0^2}{m^2\omega^2}, i = 20 \log_{10}\left(\frac{m\omega}{2\rho_0 c_0}\right),$$

où $i = 10 \log_{10}(1/\tau)$ est l'indice d'affaiblissement acoustique qui est la différence de niveau entre l'onde incidente et l'onde transmise.

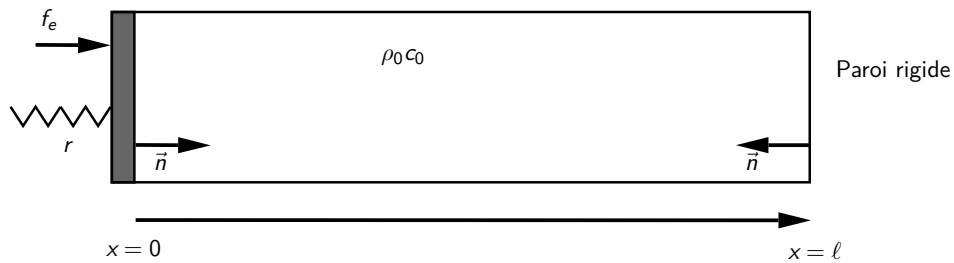
Transparence de cloisons

Cette loi, valable “loin” de la fréquence propre de la paroi (haute fréquence), porte le nom de loi de masse et stipule que l'amplitude de l'onde transmise est inversement proportionnelle à la masse de la cloison et présente une pente de 6 dB par octave : $i(2\omega) = i(\omega) + 20\log_{10}(2) = i(\omega) + 6$.



Probléme

On considère le problème mono dimensionnel constitué d'un guide d'onde, de longueur ℓ, fermé à l'extrémité $x = 0$ par une cloison masse-ressort et en $x = \ell$ par une paroi parfaitement rigide (condition de Neumann). Ce guide contient un fluide de masse linéique ρ_0 et de célérité des ondes c_0. Ce système est une bonne approximation du caisson de haut parleur en basse fréquence.



Géométrie du guide fermé par une terminaison rigide

1. Montrer que le système masse-ressort fluide comporte une infinité de fréquences propres.
2. Calculer à basse fréquence le déplacement, en supposant que $\omega\ell/c_0 \ll 1$. Montrer dans ce cas que la présence de la lame d'air se réduit à un effet de raideur ajoutée.

Solution

Les équations du problème sont données par

$$\begin{array}{ll} \text{en } x=0 & -m\omega^2 + ru = f_e - p(0) \\ & p'(0) = \omega^2 \rho_0 u \\ \text{en } x=\ell & p'(\ell) = 0 \qquad (\partial_n = 0 \Leftrightarrow -\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0) \\ x \in]0,\ell[& p''(x) + k^2 p(x) = 0 \end{array}$$

L'équation de Helmholtz conduit à $p(x) = A\exp(\imath kx) + B\exp(-\imath kx)$. Les trois premières équations du système précédent s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} -m(\omega^2 - \omega_0^2)u + A + B &= f_e \\ \imath\omega\rho_0 c_0 u + A - B &= 0 \\ A\mathrm{e}^{\imath k\ell} - B\mathrm{e}^{-\imath k\ell} &= 0. \end{aligned}$$

Pour montrer que le système masse-ressort-fluide comporte une infinité de fréquences propres, il suffit de montrer qu'il existe une infinité de fréquences réelles qui autorisent des solutions non nulles pour une force d'excitation nulle.

C'est à dire qu'il existe des fréquences $D(\omega) = 0$

Solution

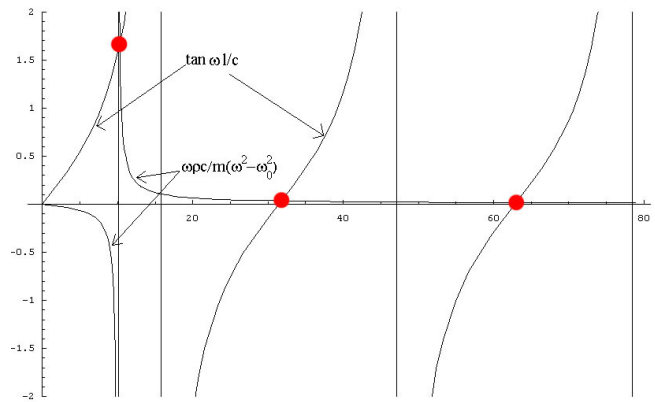
On a

$$D(\omega) = -2\imath(m(\omega^2 - \omega_0^2)\sin k\ell - \omega\rho_0 c_0 \cos k\ell$$

Résoudre $D(\omega) = 0$, il suffit de résoudre

$$m(\omega^2 - \omega_0^2)\sin k\ell = \omega\rho_0 c_0 \cos k\ell \Leftrightarrow \tan \omega\ell/c_0 = \omega\rho_0 c_0/m(\omega^2 - \omega_0^2)$$

Qu'on résout graphiquement. On cherche les points communs aux courbes $\tan \omega\ell/c_0$ et $\omega\rho_0 c_0/m(\omega^2 - \omega_0^2)$.



Zéros du déterminant du système avec terminaison infiniment rigide

On a une infinité de zéros et donc de fréquences propres.

Solution

Ces fréquences correspondent aux zéros légèrement décalés de $\tan \omega \ell / c_0$ vers les aigus du système constitué d'une cavité rigide aux deux extrémités (le système masse ressort à l'origine rajoute un peu de raideur au système de cavité rigide du fait de la présence du ressort).
On observe aussi que la fréquence propre du système masse-ressort est légèrement décalée vers les aigus, ceci est dé au fait que le fluide rajoute un peu de raideur au système masse-ressort.

$$u = -\frac{f_e}{(m(\omega^2 - \omega_0^2) - \omega \rho_0 c_0 \cot \frac{\omega \ell}{c_0})}.$$

Pour $\omega \ell_0 / c_0 \ll 1$, on a $\cot \omega \ell / c_0 \approx 1/(\omega \ell / c_0)$. Soit

$$u \approx -\frac{f_e}{(m(\omega^2 - \omega_0^2) - \frac{\rho_0 c_0^2}{\ell})}.$$

Or $\rho c_0^2 / \ell$ a une dimension de raideur [Kg][S]^2. On pose alors $\omega_1^2 = \omega_0^2 + \rho_0 c_0^2 / m\ell > \omega_0^2$.
Et on obtient le déplacement d'un système masse-ressort à raideur augmentée.

$$u \approx -\frac{f_e}{(m(\omega^2 - \omega_1^2)}.$$

Problème

On s'intéresse au problème que précédemment mais on remplace la paroi rigide en $x = \ell$ par une paroi décrite par une condition de Dirichlet qui est une première approximation du tuyau débouchant à l'air libre.

1. Montrer que le système masse-ressort fluide comporte une infinité de fréquences propres.
2. Calculer à basse fréquence le déplacement, en supposant que $\omega\ell/c_0 \ll 1$. Montrer dans ce cas que le présence de la lame d'air se réduit à un effet de masse ajoutée.

Solution

Avec les mêmes notations, seule change la condition en $x = \ell$, donnée par $p(\ell) = 0$.
Les équations du problème sont données par

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0 \qquad & -m\omega^2 + ru = f_e - p(0) \\ & p'(0) = \omega^2 \rho_0 u \\ \text{en } x = \ell \qquad & p(\ell) = 0 \\ x \in]0, \ell[\qquad & p''(x) + k^2 p(x) = 0 \end{aligned}$$

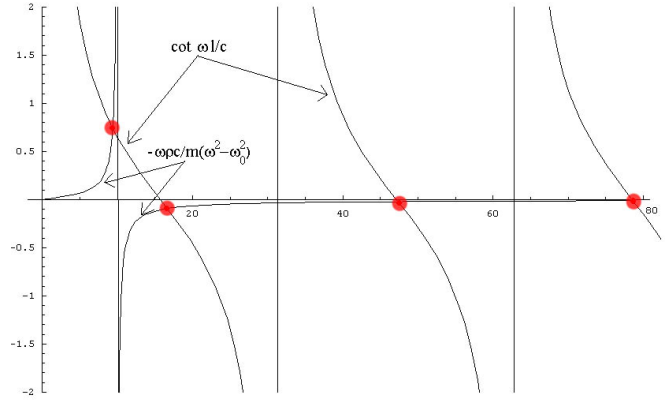
On obtient le système

$$\begin{aligned} & -m(\omega^2 - \omega_0^2)u + A + B = f_e \\ & \imath\omega\rho_0 c_0 u + A - B = 0 \\ & A\mathrm{e}^{\imath k\ell} + B\mathrm{e}^{-\imath k\ell} = 0. \end{aligned}$$

De déterminant $D(\omega) = -2\imath(m(\omega^2 - \omega_0^2)\cos k\ell + \omega\rho_0 c_0 \sin k\ell)$. Pour résoudre $D(\omega) = 0$, il suffit de résoudre $\cot \omega\ell/c_0 = \omega\rho_0 c_0/m(\omega^2 - \omega_0^2)$.
On procède graphiquement.

Solution

On voit aisément que l'on a encore une infinité de fréquences propres.



Zéros du déterminant du système avec terminaison infiniment molle

Ces points correspondent aux zéros de $\cot \omega \ell / c_0$ sont les zéros légèrement décalés vers les aigus du système constitué d'une cavité rigide à l'origine et molle à l'autre extrémité ; ceci peut s'expliquer facilement par le fait le système masse ressort à l'origine rajoute toujours un peu de raideur au système de cavité rigide/molle du fait de la présence du ressort.
Par contre, on observe que la fréquence propre du système masse-ressort est légèrement décalée vers les basses fréquences, ceci est dû à la masse du fluide qu'entraîne la paroi dans son mouvement qui augmente légèrement la masse apparente de la paroi.

Solution

Le déplacement est donné par

$$u = -\frac{f_e}{(m(\omega^2 - \omega_0^2) + \omega\rho_0 c_0 \tan\frac{\omega\ell}{c_0})}.$$

Pour $\omega\ell/c_0 \ll 1$, on a $\tan\omega\ell/c_0 \approx \omega\ell/c_0$. Soit

$$u \approx -\frac{f_e}{(m(\omega^2 - \omega_0^2) + \omega^2\rho_0\ell)}.$$

Or $\rho_0\ell$ a une dimension de masse. On pose alors $m_f = \rho_0\ell$. Et on obtient le déplacement d'un système masse-ressort à masse augmentée.

$$u \approx -\frac{f_e}{((m + m_f)\omega^2 - m\omega_0^2)},$$

qui traduit bien l'effet de masse ajoutée par la présence du fluide.

Régime transitoire

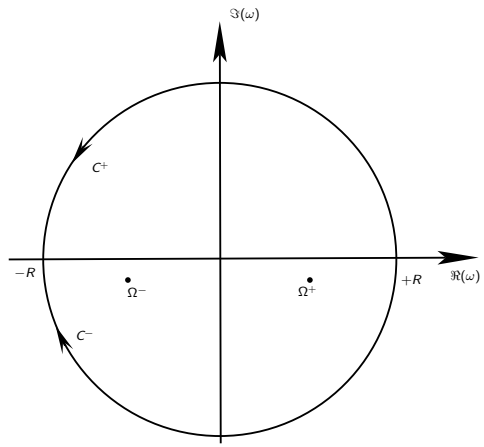
Supposons qu'il n'y a pas de sources au sein du fluide et que $F_e(t)$ débute à $t = 0$. Le déplacement de la paroi est alors donné par la transformée de Fourier inverse du déplacement en régime harmonique

$$U(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_e(\omega)}{m\left(2\imath\omega\frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2\right)} \mathrm{e}^{-\imath\omega t} \mathrm{d}\omega.$$

On pose $F_e(t) = \delta(t) \Rightarrow f_e(\omega) = 1$, $U_\delta(t)$: réponse impulsionnelle

$$U_\delta(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\imath\omega t}}{m\left(2\imath\omega\frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2\right)} \mathrm{d}\omega.$$

Théorème des résidus !



Contour d'intégration

Solution

On intègre sur tout contour qui contient l'axe réel :

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{C^{\pm}} \frac{\mathrm{e}^{-\imath\omega t}}{m\left(2\imath\omega\frac{\rho_0 c_0}{m}+\omega^2-\omega_0^2\right)}\mathrm{d}\omega = -\frac{\pm 2\imath\pi}{2\pi}\sum_{res(C^{\pm})}\frac{\mathrm{e}^{-\imath\omega t}}{m\left(2\imath\omega\frac{\rho_0 c_0}{m}+\omega^2-\omega_0^2\right)}$$

On prend $+$ lorsqu'on intègre sur C^+ et $-$ lorsqu'on intègre sur C^-

Le choix du contour permet d'annuler l'intégrale sur le demi cercle lorsque l'on passe à la limite $R \to \infty$.

Pour garder à l'exponentielle une valeur finie, il faut intégrer sur C^+ pour $t < 0$ et sur C^- pour $t > 0$.

Régime transitoire

Les zéros de $2\imath\omega\frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2$ sont les zéros d'un polynôme de degré 2 en ω.

Supposons $\Delta' = \omega_0^2 - (\rho_0 c_0/m)^2 > 0$, avec $\dot{\Omega} > 0$ et $\hat{\Omega} > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Omega^+ &= -\imath\frac{\rho_0 c_0}{m} + \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\rho_0 c_0}{m}\right)^2} = \dot{\Omega} - \imath\hat{\Omega} \\
\Omega^- &= -\imath\frac{\rho_0 c_0}{m} - \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\rho_0 c_0}{m}\right)^2} = -\dot{\Omega} - \imath\hat{\Omega} = -(\Omega^+)^*
\end{aligned}$$

$\Im\left(\Omega^{\pm}\right) < 0$, C^+ ne contient aucun pôle.

Pour $t < 0$, on a $U_\delta(t) = 0$ ce qui satisfait bien le principe de causalité.

Pour $t > 0$, on obtient avec $z - z^* = 2\Im[z]$

$$U_\delta(t) = \frac{\imath}{2m}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\imath\Omega^+ t}}{\Omega^+ + \imath\frac{\rho_0 c_0}{m}} + \frac{\mathrm{e}^{-\imath\Omega^- t}}{\Omega^- + \imath\frac{\rho_0 c_0}{m}}\right] = \frac{1}{m}\Im\left[\frac{\mathrm{e}^{-\imath\dot{\Omega}t}}{\Omega^+ + \imath\frac{\rho_0 c_0}{m}}\right]\mathrm{e}^{-\hat{\Omega}t} = \frac{\sin\dot{\Omega}t}{m\dot{\Omega}}\mathrm{e}^{-\hat{\Omega}t}$$

$U_\delta(t)$ est une oscillation amortie, d'autant plus que $\hat{\Omega} = \rho_0 c_0/m$ est grand.

Régime transitoire

Si on s'intéresse à une excitation temporelle autre qu'une impulsion de Dirac, deux méthodes existent. Soit on calcule directement la transformée de Fourier de $u(\omega)$ et on obtient

$$U(t) = -\frac{1}{m}\Im\left[f_e(\Omega^+)\frac{\mathrm{e}^{-\imath\dot{\Omega}t}}{\Omega^+ + \imath\frac{\rho_0 c_0}{m}}\right]\mathrm{e}^{-\hat{\Omega}t},$$

si $f_e(\Omega^{+*}) = -f_e^*(\Omega^+)$, ou bien on calcule la réponse du système par convolution temporelle entre la réponse impulsionnelle et l'excitation. Par exemple, si $F_e(t) \neq 0$ pour $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_0^t U_\delta(t-\tau)F_e(\tau)\mathrm{d}\tau, t < T \\ U(t) &= \int_0^T U_\delta(t-\tau)F_e(\tau)\mathrm{d}\tau, t \geq T. \end{aligned}$$

$\Omega^\pm$ oscillations libres du système : pulsations de résonance

Elles différent des pulsations propres pour les systèmes dont l'amortissement dépend de la fréquence (couplage fluide-structure) ou plus généralement dans tout type d'amortissement lié au matériau (viscoélasticité, thermoélasticité) non homogène.

Régime transitoire

La pression acoustique dans le guide $x > 0$ est donnée, avec $A^+(\omega)$ calculé pour $f_e = 1$, par

$$\begin{aligned} P_\delta^+(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^+(\omega)\mathrm{e}^{+\imath kx}\mathrm{e}^{-\imath\omega t}\mathrm{d}\omega, \\ P_\delta^+(x,t) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\imath\omega\rho_0 c_0}{m\left(2\imath\omega\frac{\rho_0 c_0}{m}+\omega^2-\omega_0^2\right)}\mathrm{e}^{-\imath\omega\left(t-\frac{x}{c_0}\right)}\mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Ici encore du fait du terme $\exp(-\imath\omega(t-x/c_0))$, il est nécessaire d'intégrer sur C^+ pour $t < x/c_0$. Ainsi la pression est nulle pour $t < x/c_0$

On obtient, avec $z + z^* = 2\Re[z]$, pour $t > \frac{x}{c_0}$

$$\begin{aligned} P_\delta^+(x,t) &= -\frac{\rho_0 c_0}{m}\Re\left[\frac{\Omega^+}{\Omega^+ + \imath\frac{\rho_0 c_0}{m}}\mathrm{e}^{-\imath\dot{\Omega}\left(t-\frac{x}{c_0}\right)}\right]\mathrm{e}^{-\hat{\Omega}\left(t-\frac{x}{c_0}\right)} \\ &= -\hat{\Omega}\Re\left[\frac{\dot{\Omega}^+ - \imath\hat{\Omega}}{\dot{\Omega}}\mathrm{e}^{-\imath\dot{\Omega}\left(t-\frac{x}{c_0}\right)}\right]\mathrm{e}^{-\hat{\Omega}\left(t-\frac{x}{c_0}\right)} \\ &= -\hat{\Omega}\left(\cos\dot{\Omega}\left(t-\frac{x}{c_0}\right) - \frac{\hat{\Omega}}{\dot{\Omega}}\sin\dot{\Omega}\left(t-\frac{x}{c_0}\right)\right)\mathrm{e}^{-\hat{\Omega}\left(t-\frac{x}{c_0}\right)}. \end{aligned}$$

Régime transitoire

Lorsque $\rho_0 c_0/m \geq \omega_0$, la réponse temporelle n'est plus une oscillation amortie.

Les racines du dénominateur s'écrivent toujours
$\Omega^{\pm} = -\imath\rho_0 c_0/m \pm \sqrt{\omega_0^2 - (\rho_0 c_0/m)^2}$. Pour $\rho_0 c_0/m \geq \omega_0$, on pose
$\beta = \omega_0 m/(\rho_0 c_0), 0 < \beta < 1$. On a alors $\Omega^{\pm} = -\imath\rho_0 c_0/m(1 \mp \sqrt{1-\beta^2})$.
Puisque les racines sont de partie imaginaire négative, la réponse du piston est toujours causale et on a pour $t > 0$

$$
\begin{aligned}
U_\delta(t) &= \frac{\imath}{2m}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\imath\Omega^+ t}}{\Omega^+ + \imath\frac{\rho_0 c_0}{m}} + \frac{\mathrm{e}^{-\imath\Omega^- t}}{\Omega^- + \imath\frac{\rho_0 c_0}{m}}\right] \\
&= \frac{1}{2m}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 c_0}{m}(1-\sqrt{1-\beta^2})t}}{\frac{\rho_0 c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 c_0}{m}(1+\sqrt{1-\beta^2})t}}{-\frac{\rho_0 c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}}\right] \\
&= \frac{1}{2m}\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{\rho_0 c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}t}}{\frac{\rho_0 c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}t}}{\frac{\rho_0 c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}}\right]\mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 c_0}{m}t} \\
&= \frac{1}{m}\frac{\sinh\left(\frac{\rho_0 c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}t\right)}{\frac{\rho_0 c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 c_0}{m}t}.
\end{aligned}
$$

Régime transitoire

On pose $\epsilon = \rho_0 c_0/m$ et $\alpha = \epsilon\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{\epsilon^2 - \omega_0^2}$.

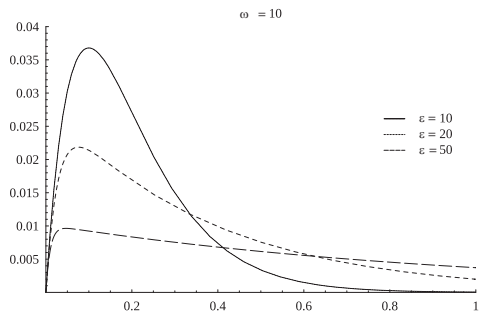
$$U_\delta(t) = \frac{1}{m}\alpha \sinh(\alpha t)\mathrm{e}^{-\epsilon t}$$

Le déplacement de la paroi est une fonction non oscillante du temps (amortissement surcritique).

La valeur critique de l'amortissement est telle que $\alpha = 0$ (soit $\epsilon = \omega_0$).

$$U_\delta(t) = \frac{1}{m}\mathrm{e}^{-\epsilon t}$$

De $\epsilon = \omega_0$, avec $\omega_0 = \sqrt{r/m}$, on tire que $\rho_0 c_0 = \sqrt{rm}$.



Mouvements de paroi en amortissements critique ($\omega_0 = \epsilon$) et sur-critique ($\omega_0 > \epsilon$)

Dans l'air l'amortissement surcritique n'est jamais observé (même pour une membrane de haut-parleur).

Problème

En l'absence de fluide, une manière très simple d'introduire un amortissement dans un système mécanique consiste à traduire la perte d'énergie sous la forme d'une raideur complexe $r = r_0(1 - \imath\eta)$, ou $0 < \eta \ll 1$ est le facteur d'amortissement (ou angle de perte). Montrer que cette méthode conduit à une réponse non causale.

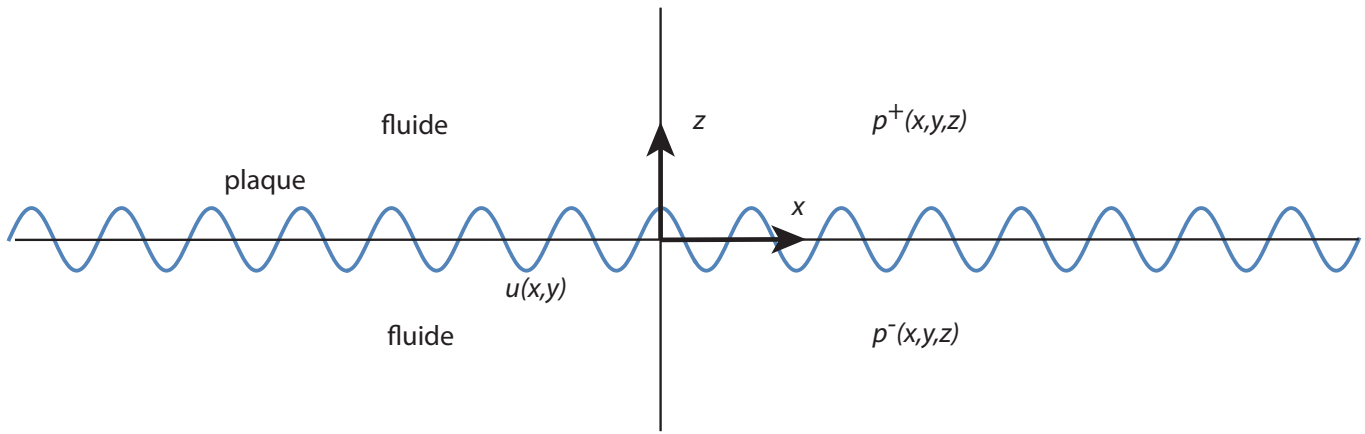
Le mouvement de la paroi amortie en l'absence de fluide est donné en régime harmonique par $u(\omega) = -f_e/m(\omega^2 - \omega_0^2(1 - i\eta))$.

Les pulsation de résonances $\Omega^{\pm} = \pm\omega_0(1 - i\eta/2)$ si $\eta \ll 1$ ont leurs parties réelle et imaginaire de signe opposé.

Comme on a deux racines de parties imaginaires de signe opposé, on ne peut pas avoir de réponse causale.

Plaque mince couplée

Une plaque mince, homogène et isotrope de rigidité $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ et de masse surfacique $m = \rho_p h$ occupe le plan $z = 0$. Les deux demi-espaces $z > 0$ et $z < 0$ sont occupés par un fluide parfait de masse volumique ρ_0 et de célérité des ondes c_0.
$u(x, y)$ le déplacement de la plaque $p^{\pm}(x, y, z)$ la pression acoustique dans les deux demi-espaces.



$$\begin{aligned} D\left(\Delta^2 - k_p^4\right) u(x,y) &= -\left(p^+(x,y,z=0) - p^-(x,y,z=0)\right) \forall x, y \\ \left(\Delta + k_f^2\right) p^{\pm}(x,y,z) &= 0 \text{ dans } z > 0, z < 0 \\ \omega^2 \rho_0 u(x,y) &= \partial_z p^{\pm}(x,y,z=0) \end{aligned}$$

avec $k_p^4 = \rho_p h \omega^2 / D$ et $k_f^2 = \omega^2 / c_0^2$.

On cherche les ondes libres qui se propagent dans la plaque.

Plaque mince couplée

Considérons une onde de la forme $u(x,y) = \mathrm{e}^{\imath kx}$. L'équation de continuité donne

$$\partial_z p^{\pm}(x,y,z=0) = \omega^2 \rho_f \mathrm{e}^{\imath kx}$$

$p^{\pm}(x,y,z) = p^{\pm}(x,z)$ s'écrit donc

$$p^{\pm}(x,z) = \frac{\omega^2 \rho_f}{\pm \imath \alpha} \mathrm{e}^{\imath(kx \pm \alpha z)}$$

Quel signe : $\pm\alpha$?

Nous avons

$$\left(\Delta + k_f^2\right) p^{\pm}(x,y,z) = 0 \Rightarrow \left(\Delta + k_f^2\right) \mathrm{e}^{\imath(kx \pm \alpha z)} = 0$$

De $\Delta \mathrm{e}^{\imath(kx \pm \alpha z)} = -(k^2 + \alpha^2)\mathrm{e}^{\imath(kx \pm \alpha z)}$, nous obtenons

$$\left(k_f^2 - (k^2 + \alpha^2)\right) \mathrm{e}^{\imath(kx \pm \alpha z)} = 0 \Rightarrow \alpha^2 = k_f^2 - k^2$$

Nous devons choisir $\alpha > 0$ si $\alpha^2 > 0$ ou $\Im\alpha > 0$ si $\Im\alpha \neq 0$ car les ondes qui s'éloignent de la plaque sont amorties quand $|z|$ croît.

Plaque mince couplée

Repartons de l'équation des plaques avec $p^{\pm}(x, y, z = 0) = \pm \frac{\omega^2 \rho_f}{\imath \alpha} \mathrm{e}^{\imath k x}$

$$D\left(\Delta^2 - k_p^4\right) u(x, y) \quad = \quad -\left(p^+(x, y, z = 0) - p^-(x, y, z = 0)\right)$$

les nombres d'onde k satisfont la relation de dispersion des plaques couplées

$$\mathcal{D}(k) = \imath \sqrt{k_f^2 - k^2} \left(k^4 - k_p^4\right) + 2\omega^2 \rho_0 / D = 0$$

La relation de dispersion peut s'écrire $(k_f^2 - k^2)(k^4 - k_p^4)^2 + 4\omega^2 \rho_0^2 / D^2 = 0$

Polynôme de degré 5 en k^2 à coefficients réels : 1, 3 ou 5 racines réelles.

2 cas à traiter : $k_f > k_p$ et $k_f < k_p$ (et $k_f = k_p$)

Lorsque $k_f = k_p$, les célérités des ondes sont identiques : fréquence de coïncidence

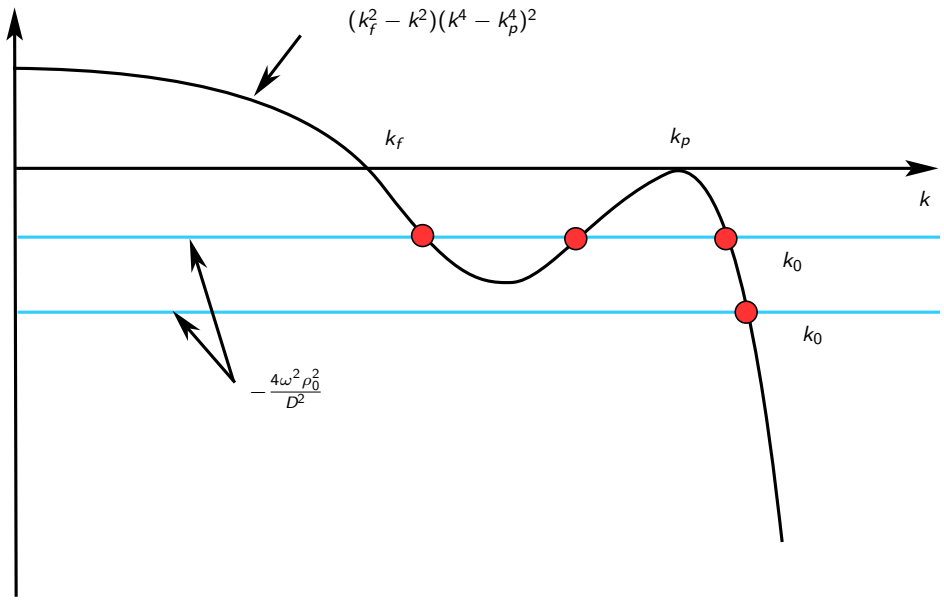
$$f_c = c_0^2 \sqrt{\rho_p h / D} / 2\pi$$

Pour une plaque de 1 cm d'épaisseur dans l'air, pour l'acier, l'aluminium ou le verre $f_c = 1200$ Hz, pour le cuivre $f_c = 1800$ Hz, pour le béton $f_c = 2000$ Hz et le plexiglas $f_c = 4000$ Hz et environ $3000 - 4000$ Hz pour une plaque de BA13 en plâtre.

Plaque mince couplée

▷ En BF : $\omega < \omega_c$, $k_f < k_p$ et $c_p < c_0$: régime subsonique, la plaque rayonne mal.

Résolution graphique de la relation de dispersion $k_f < k_p$ (régime subsonique).

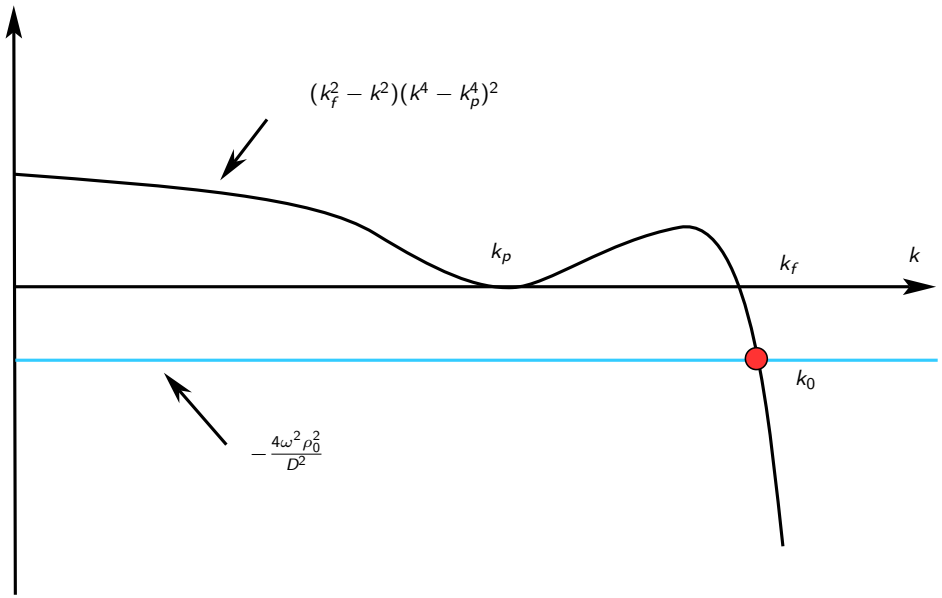


Il existe au moins 1 racine réelle $k_0 > k_p > k_f$.

Plaque mince couplée

▷ En HF : $\omega > \omega_c$, $k_f > k_p$ et $c_p > c_0$: régime supersonique, la plaque rayonne bien.

Résolution graphique de la relation de dispersion $k_f > k_p$ (régime supersonique)



Dans ce cas encore, une solution réelle $k_0 > k_f > k_p$ existe toujours.

Plaque mince couplée

La racine réelle k_0 correspond à une onde plane subsonique qui se propage dans la plaque sans amortissement vers les $x > 0$:

$$u_0 = \mathrm{e}^{\imath k_0 x}, \text{ propagation vers les } x > 0$$

À la racine réelle k_0 de l'équation de dispersion, correspond la pression acoustique :

$$p_0^+ = \frac{\omega^2 \rho_f}{\imath \alpha} \mathrm{e}^{\imath (k_0 x + \alpha z)}$$

$k_0 > k_f$ donc $\alpha^2 = k_f^2 - k_0^2 < 0$ et donc $\alpha = \imath \sqrt{k_0^2 - k_f^2}$.

Le champ de pression rayonné par l'onde k_0 est une onde plane évanescente. Elle décroît exponentiellement avec z et ne transporte aucune énergie dans le fluide.

Approximation fluide léger

Soit $\epsilon = \rho_0/(\rho_p h)$. La relation de dispersion s'écrit alors

$$(k_f^2 - k^2)(k^4 - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0$$

Pour $\epsilon = 0$, l'équation de dispersion se réduit à

$$(k_f^2 - k^2)(k^4 - k_p^4)^2 = 0$$

dont les racines sont évidemment $k_1 = \pm k_p$, $k_2 = \pm \imath k_p$ et $k_3 = \pm k_f$.

On cherche

$$\begin{aligned} k_1 &= k_p(1 + \epsilon\gamma_1) \\ k_2 &= \imath k_p(1 + \epsilon\gamma_2) \\ k_3 &= k_f(1 + \epsilon^2\gamma_3) \end{aligned}$$

Dont les inconnues sont γ_i

Approximation fluide léger

Partons de $k_1 = k_p(1+\epsilon\gamma_1)$ que l'on reporte dans la relation de dispersion

$$(k_f^2 - (k_p(1+\epsilon\gamma_1))^2)((k_p(1+\epsilon\gamma_1))^4 - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0$$
$$(k_f^2 - k_p^2(1+2\epsilon\gamma_1))(k_p^4(1+4\epsilon\gamma_1) - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0$$

Si k_f et k_p sont suffisamment différents, nous pouvons écrire
$k_f^2 - k_p^2(1+2\epsilon\gamma_1) = k_f^2 - k_p^2$.

La relation de dispersion devient alors $(k_f^2 - k_p^2)(4\epsilon\gamma_1 k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0$

soit encore $(k_f^2 - k_p^2)4\gamma_1^2 = -1$. D'où :

$$\gamma_1 = \pm\frac{1}{2\imath\sqrt{k_f^2 - k_p^2}}.$$

Approximation fluide léger

Partons de $k_2 = \imath k_p(1 + \epsilon\gamma_2)$, que l'on reporte dans la relation de dispersion

$$(k_f^2 + k_p^2(1 + 2\epsilon\gamma_2))(k_p^4(1 + 4\epsilon\gamma_2) - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0.$$

La relation de dispersion devient alors $(k_f^2 + k_p^2)(4\epsilon\gamma_2 k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0$. D'où :

$$\gamma_2 = \pm\frac{1}{2\imath\sqrt{k_f^2 + k_p^2}}.$$

Approximation fluide léger

Partons de $k_3 = \imath k_p(1 + \epsilon^2\gamma_3)$, que l'on reporte dans la relation de dispersion.

$$(-2\epsilon^2\gamma_3 k_f^2)(k_f^4(1 + 4\epsilon^2\gamma_3) - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0$$
$$(-2\epsilon^2\gamma_3 k_f^2)(k_f^4 - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0,$$

si k_f et k_p sont suffisamment différents.

$$\gamma_3 = \frac{2k_p^8}{k_f^2(k_f^4 - k_p^4)^2}.$$

Approximation fluide léger

Finalement

$$
\begin{aligned}
k_1^{\pm} &= k_p \left(1 \pm \epsilon \frac{1}{2\imath\sqrt{k_f^2 - k_p^2}} \right) \\
k_2^{\pm} &= \imath k_p \left(1 \pm \epsilon \frac{1}{2\imath\sqrt{k_f^2 + k_p^2}} \right) \\
k_3 &= k_f \left(1 + \epsilon^2 \frac{2k_p^8}{k_f^2(k_f^4 - k_p^4)^2} \right)
\end{aligned}
$$

Comment se comportent ses racines en régime subsonique et supersonique ?

Approximation fluide léger

Régime subsonique

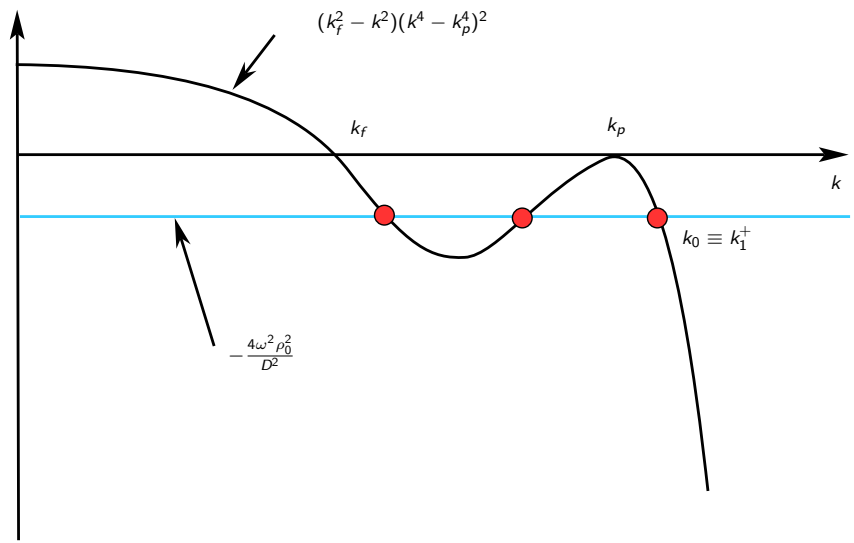
Sous la fréquence de coïncidence, on a $k_p > k_f$.

On pose $\sqrt{k_f^2 - k_p^2} = \imath\sqrt{k_p^2 - k_f^2}$.

Donc $\gamma_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{k_p^2 - k_f^2}}$, $\gamma_2 = \pm\frac{\imath}{2\sqrt{k_p^2 + k_f^2}}$ et $\gamma_3 = \frac{2k_p^8}{k_f^2(k_f^4 - k_p^4)^2}$.

On obtient les racines

$$
\begin{aligned}
k_1^{\pm} &= k_p\left(1 \pm \frac{\epsilon}{2\sqrt{k_p^2 - k_f^2}}\right) \\
k_2^{\pm} &= \imath k_p\left(1 \pm \frac{\imath\epsilon}{2\sqrt{k_f^2 + k_p^2}}\right) \\
k_3 &= k_f\left(1 + \frac{2\epsilon^2 k_p^8}{k_f^2(k_f^4 - k_p^4)^2}\right)
\end{aligned}
$$



On a une paire de racines complexes conjuguées et trois racines réelles (une supérieure à k_f et deux racines de part et d'autre de k_p)

Approximation fluide léger

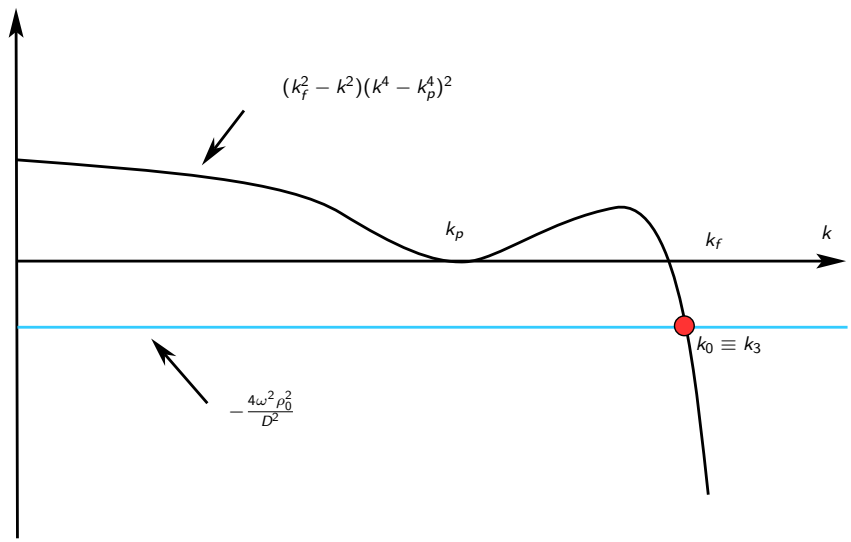
Régime supersonique

Au dessus de la fréquence de coïncidence, on a $k_f > k_p$.

Donc $\gamma_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{k_p^2-k_f^2}}$, $\gamma_2 = \pm\frac{\imath}{2\sqrt{k_f^2+k_p^2}}$ et $\gamma_3 = \frac{2k_p^8}{k_f^2(k_f^4-k_p^4)^2}$.

On obtient les racines

$$
\begin{aligned}
k_1^{\pm} &= k_p\left(1 \pm \frac{\imath\epsilon}{2\sqrt{k_f^2-k_p^2}}\right)\\
k_2^{\pm} &= \imath k_p\left(1 \pm \frac{\imath\epsilon}{2\sqrt{k_f^2+k_p^2}}\right)\\
k_3 &= k_f\left(1 + \frac{2\epsilon^2 k_p^8}{k_f^2(k_f^4-k_p^4)^2}\right)
\end{aligned}
$$



On a une racine réelle supérieure à k_f et k_p et deux paires de racines complexes conjuguées

Approximation fluide léger

Régime sonique, $k_f = k_p$.

Montrer que les racines k_2 ne changent pas et que les racines k_1 et k_3 sont confondues. On posera $k_1 = k_p\left(1+\epsilon^{2/3}\gamma_1\right)$ et $k_3 = k_f\left(1+\epsilon^{2/3}\gamma_3\right)$.

On voit facilement d'après les résultats précédents que les racines $k_2^{\pm}$ sont identiques en régime subsonique et supersonique. Par contre, les racines k_1 et k_3, identiques en régime sonique, ne sont pas définies dans ce cas.
Partons de $k_1 = k_3 = k_p(1+\epsilon^{2/3}\gamma_1)$ que l'on reporte dans la relation de dispersion

$$
\begin{aligned}
& (k_f^2 - (k_p(1+\epsilon^{2/3}\gamma_1))^2)((k_p(1+\epsilon^{2/3}\gamma_1))^4 - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0 \\
\Rightarrow \quad & (k_f^2 - k_p^2(1+2\epsilon^{2/3}\gamma_1))(k_p^4(1+4\epsilon^{2/3}\gamma_1) - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Comme $k_f = k_p$, on obtient $(-2k_p^2\epsilon^{2/3}\gamma_1)(4\epsilon^{2/3}\gamma_1 k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0$.

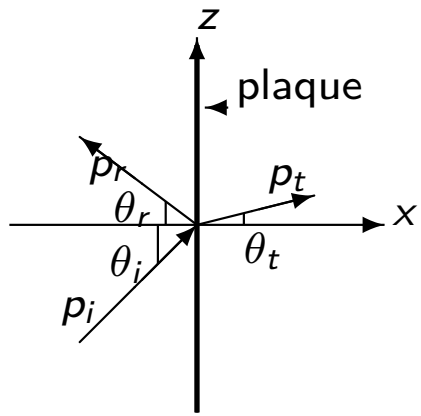
Soit encore $8k_p^2\epsilon^{6/3}\gamma_1^3 = \epsilon^2$. Soit finalement $\gamma_1 = \gamma_3 = 1/\left(2k_p^{2/3}\right)$.

On obtient une seule racine réelle (supérieure à k_f).

$$
k_1 = k_3 = k_f\left(1+\epsilon^{2/3}\frac{1}{2k_p^{2/3}}\right)
$$

Transmission d'une onde plane par une plaque mince

Nous considérons ici le problème bidimensionnel d'une plaque d'extension infinie qui sépare deux domaines semi-infinis occupés par le même fluide parfait :



La plaque est insonifiée par une onde plane dont l'angle d'incidence par rapport à la normale est donné par θ_i. Dans $x < 0$, la pression est composée de deux termes p_i et p_r. Dans $x > 0$, seule une pression transmise p_t existe. En outre, $u(y, z) = u(z)$, $p^+(x, y, z) = p^+(x, z)$ et $p^-(x, y, z) = p^-(x, z)$. Les équations du problème sont :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^4}{dz^4} - k_p^4\right) u(z) &= -\frac{1}{D}\left(p^+(0,z) - p^-(0,z)\right) \\ \left(\Delta + k_f^2\right) p^{\pm}(x,z) &= 0 \text{ dans } x > 0, x < 0 \\ \omega^2 \rho_0 u(z) &= \partial_x p^{\pm}, \forall z. \end{aligned}$$

Transmission d'une onde plane par une plaque mince

Pour simplifier encore le problème, nous pouvons supposer que la pression incidente est unitaire. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} p_i(x,z) &= e^{\imath k_f(z\sin\theta_i + x\cos\theta_i)} \\ p_r(x,z) &= Re^{\imath k_f(z\sin\theta_r - x\cos\theta_r)} \\ p_t(x,z) &= Te^{\imath k_f(z\sin\theta_t + x\cos\theta_t)}. \end{aligned}$$

Avec $p^- = p_i + p_r$ et $p^+ = p_t$, la continuité des accélérations normales donne :

$$\begin{aligned} \omega^2\rho_0 u(z) &= \imath k_f\cos\theta_i e^{\imath k_f z\sin\theta_i} - R\imath k_f\cos\theta_r e^{\imath k_f z\sin\theta_r} \\ &= T\imath k_f\cos\theta_t e^{\imath k_f z\sin\theta_t}. \end{aligned}$$

Ces relations sont vraies pour tout x, soit

$$\imath k_f\sin\theta_i = \imath k_f\sin\theta_r = \imath k_f\sin\theta_t \Rightarrow \theta_i = \theta_r = \theta_t = \theta$$

La deuxième équation de continuité nous donne :

$$u(z) = \frac{T\imath k_f\cos\theta_t}{\omega^2\rho_0} e^{\imath k_f z\sin\theta},$$

si nous reportons cette expression dans l'équation du déplacement :

$$\left(\frac{d^4}{dz^4} - k_p^4\right) u(z) = \frac{T\imath k_f\cos\theta_t\left(k_f^4\sin^4\theta - k_p^4\right)}{\omega^2\rho_0} e^{\imath k_f z\sin\theta} = -\frac{p^+(0,z) - p^-(0,z)}{D}$$

Transmission d'une onde plane par une plaque mince

$$T\frac{\imath k_f \cos\theta_t}{\omega^2\rho_0}\left(k_f^4\sin^4\theta - k_p^4\right)\mathrm{e}^{\imath k_f z\sin\theta} = -\frac{T\mathrm{e}^{\imath k_f z\sin\theta} - (1+R)\mathrm{e}^{\imath k_f z\sin\theta}}{D}$$

$$\Rightarrow \qquad T\frac{\imath k_f \cos\theta_t}{\omega^2\rho_0}\left(k_f^4\sin^4\theta - k_p^4\right) = -\frac{T-(1+R)}{D}.$$

Condition de continuité des vitesses normales : $T = 1 - R$. D'où :

$$(1-R)\frac{\imath k_f\cos\theta}{\omega^2\rho_0}\left(k_f^4\sin^4\theta - k_p^4\right) = \frac{2R}{D}$$

$$R = \frac{\imath k_f\cos\theta\left(k_f^4\sin^4\theta - k_p^4\right)}{\imath k_f\cos\theta\left(k_f^4\sin^4\theta - k_p^4\right) + \frac{2\omega^2\rho_0}{D}}$$

$$T = 1 - R = \frac{\frac{2\omega^2\rho_0}{D}}{\imath k_f\cos\theta\left(k_f^4\sin^4\theta - k_p^4\right) + \frac{2\omega^2\rho_0}{D}}$$

Transmission d'une onde plane par une plaque mince

Rappelons que la relation de dispersion des plaques couplées est données par

$$\mathcal{D}(k) = \imath\sqrt{k_f^2 - k^2}\left(k^4 - k_p^4\right) + 2\frac{\omega^2\rho_0}{D}$$

Nous voyons aisément que

$$\mathcal{D}\left(k_f \sin\theta\right) = \imath k_f \cos\theta\left(k_f^4 \sin^4\theta - k_p^4\right) + \frac{2\omega^2\rho_0}{D}$$

Donc

$$\begin{aligned} R &= \frac{\imath k_f \cos\theta\left(k_f^4 \sin^4\theta - k_p^4\right)}{\mathcal{D}(k_f \sin\theta)} \\ T &= \frac{\frac{2\omega^2\rho_0}{D}}{\mathcal{D}(k_f \sin\theta)} \end{aligned}$$

Comme $k_f \sin\theta < k_f$, $\mathcal{D}\left(k_f \sin\theta\right)$ ne s'annule jamais puisque les racines réelles de $\mathcal{D}(k)$ sont toutes supérieures à k_f. Si $k_f \sin\theta = k_p$, il est aisé de voir que $R = 0$ et $T = 1$ il y a coïncidence et la plaque est totalement transparente.

Transmission d'une onde plane par une plaque mince

Plaçons-nous maintenant sous incidence normale $\theta = 0$. Nous avons alors :

$$R = \frac{\imath k_f k_p^4}{\imath k_f k_p^4 - \frac{2\omega^2\rho_0}{D}}, T = \frac{\frac{2\omega^2\rho_0}{D}}{\frac{2\omega^2\rho_0}{D} - \imath k_f k_p^4}$$

or $k_p^4 = \rho_p h\omega^2/D$ et $k_f = \omega/c_0$, alors

$$R = \frac{\omega\rho_p h}{\omega\rho_p h - 2\imath\rho_0 c_0}, T = \frac{2\rho_0 c_0}{2\rho_0 c_0 - \imath\omega\rho_p h}.$$

$R \approx 1$ pour une plaque très lourde en HF
$T \approx 1$ pour un fluide lourd en BF.
$\tau = TT^\star$ est donné par :

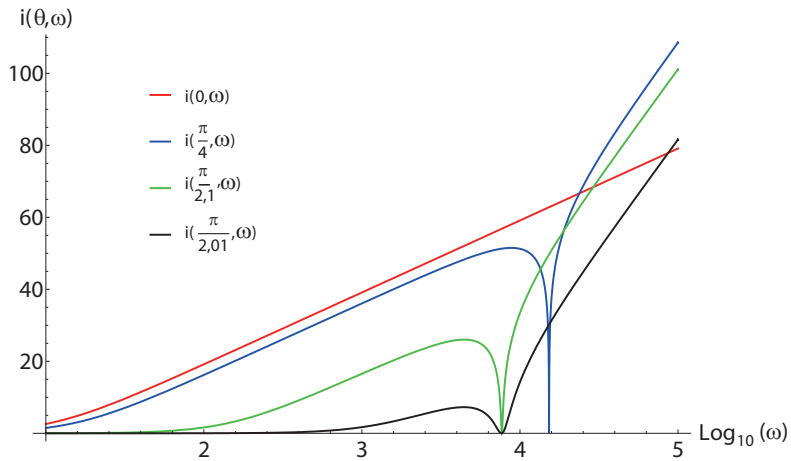
$$\tau(\theta) = \frac{4\omega^4\rho_0^2}{4\omega^4\rho_0^2 + D^2 k_f^2 \cos^2\theta \left(k_f^4 \sin^4\theta - k_p^4\right)^2}.$$

Sous incidence normale ($\theta = 0$), on obtient $\tau = 4\rho_0^2 c_0^2/(4\rho_0^2 c_0^2 + \omega^2(\rho_p h)^2)$. Comme $\tau \propto \omega^{-2}$, $i = -10\log_{10}\tau$ présente une pente de 6 dB par octave (loi de masse).

Transmission d'une onde plane par une plaque mince

L'indice d'affaiblissement acoustique présente trois zones différentes.

1. $\omega < \omega_c$: on a une pente de 6 dB par octaves (loi de masse) ; ω_c dépend de θ ;
2. $\omega \approx \omega_c$: la plaque est transparente ;
3. $\omega > \omega_c$: nous avons une pente de 18 dB par octave (loi de raideur).



Indice d'affaiblissement pour une plaque en acier de 1cm dans l'air ($f_c = 1216$ Hz).

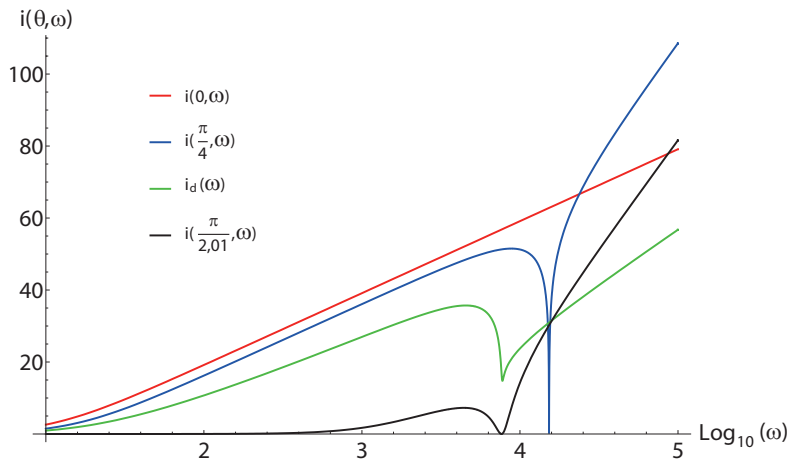
Du fait des dimensions finies des structures, les résonances limitent le gain en atténuation.

Transmission d'une onde plane par une plaque mince

En pratique, dans une salle, les ondes arrivent aléatoirement de toutes les directions (champ diffus). L'indice d'affaiblissement est obtenu par intégration sur tous les angles d'incidence $\theta_i \leq \pi/2$ est l'angle limite (On recommande $\theta_i = 78^o$) :

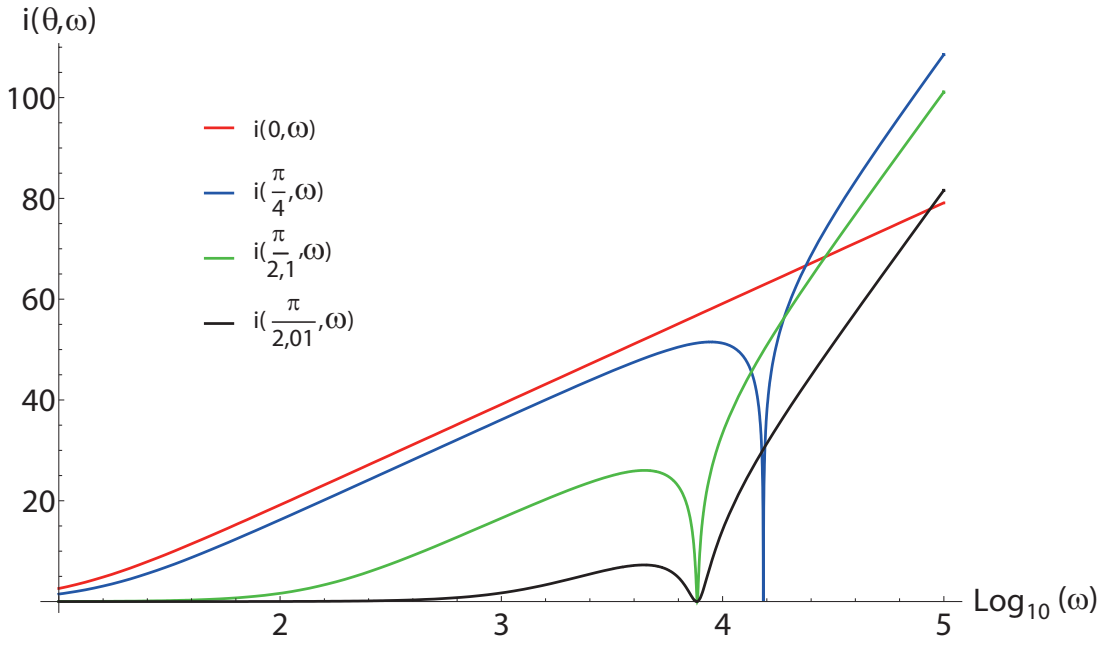
$$\tau = 2\frac{\int_0^{\theta_i} \tau(\theta)\sin\theta\cos\theta d\theta}{\int_0^{\theta_i} \sin\theta\cos\theta d\theta} = \frac{2}{\sin^2(\theta_i)}\int_0^{\theta_i} \frac{4\omega^4\rho_0^2\sin\theta\cos\theta}{4\omega^4\rho_0^2 + D^2k_f^2\cos^2\theta\left(k_f^4\sin^4\theta - k_p^4\right)^2} d\theta.$$

1. $\omega < \omega_c$: la loi de masse en champ diffus (indice diminué de 5dB) ;
2. $\omega \approx \omega_c$: le minimum reste observé mais moins marqué en champ diffus ;
3. $\omega > \omega_c$: pente à 9 dB par octave



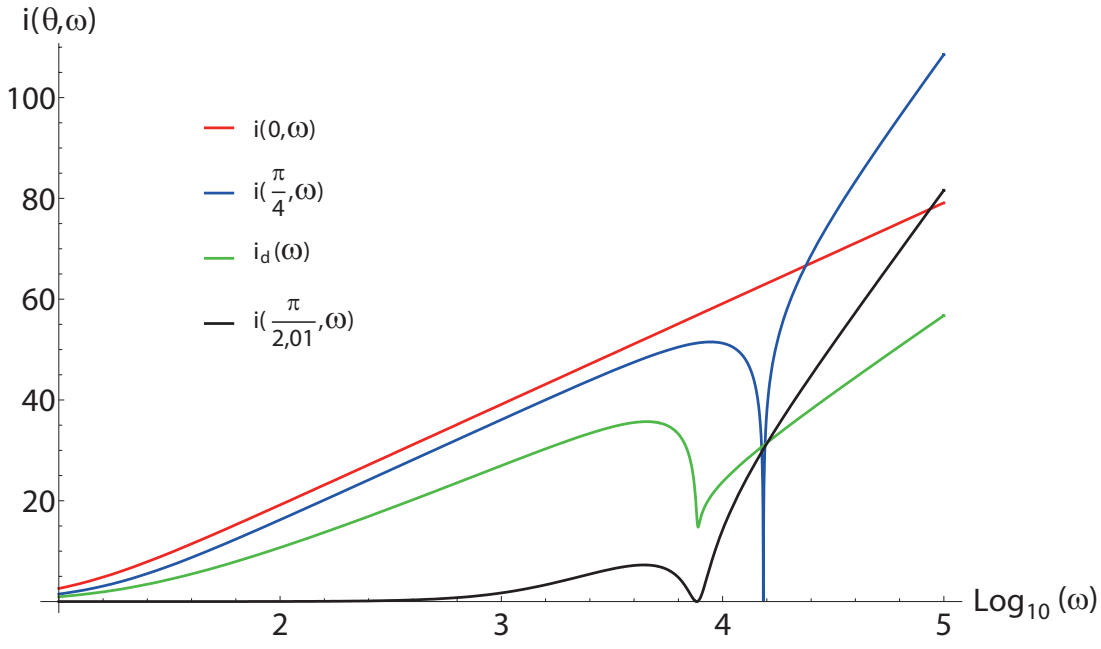
Indice d'affaiblissement sous incidence fixe : $i(\theta, \omega)$ et en champ diffus : $i_d(\omega)$.

Transmission d'une onde plane par une plaque mince



Indice d'affaiblissement sous incidence fixe : $i(\theta, \omega)$

Transmission d'une onde plane par une plaque mince



Indice d'affaiblissement en champ diffus : $i_d(\omega)$

Plaque mince infinie couplée - Noyau de Green

On cherche $u(x, y)$ solution de

$$\begin{aligned}\left(\Delta^2 - k_p^4\right) u(x,y) &= \frac{\delta(x,y)}{D} - \frac{1}{D}\left(p^+(x,y,z=0) - p^-(x,y,z=0)\right) \text{ sur } z=0\\ \left(\Delta + k_f^2\right) p^{\pm}(x,y,z) &= 0 \text{ dans } z>0, z<0\\ \omega^2 \rho_f u(x,y) &= \partial_z p^{\pm}(x,y,z=0).\end{aligned}$$

Pour assurer l'unicité de la solution, on utilise le principe d'absorption limite : (p, u) est défini comme la limite pour $\epsilon \to 0$ de la solution bornée (p_ϵ, u_ϵ) du système précédent avec $k_{f,p}$ par $k_{f,p} + \imath\epsilon, \epsilon > 0$.
$G_f(M, M')$, le noyau de Green de l'équation de Helmholtz dans le demi espace $z > 0$ qui satisfait une condition Neumann sur le plan $z = 0$.

par la méthode des images

$$G_f(M, M') = -\frac{e^{\imath k_f r(M,M')}}{4\pi r(M, M')} - \frac{e^{\imath k_f r(M,M'')}}{4\pi r(M, M'')},$$

où M'' est le symétrique de M' par rapport au plan $z = 0$.

Par représentation de Green, la pression acoustique dans le demi espace $z > 0$ est donnée par :

$$p^+(M) = -\int_{z=0} p^+(Q)\partial_n G_f(M, Q) - \partial_n p^+(Q) G_f(M, Q) \mathrm{d}Q,$$

Plaque mince infinie couplée

Si $Q \in [z=0]$:$\partial_n G_f(M,Q) = 0$ et $\partial_n p^+(Q) = \omega^2 \rho_f u(Q)$, alors :

$$p^{\pm}(x,y,z) = \mp 2\omega^2 \rho_f \int_{z=0} u(x',y') \frac{e^{\imath k_f \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}} dx'dy'.$$

On obtient une équation intégro-différentielle pour $u(x,y)$.

$$\left(\Delta^2 - k_p^4\right) u(x,y) - \frac{4\omega^2\rho_f}{D} \int_{z=0} u(x',y') \frac{e^{\imath k_f \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} dx'dy' = \frac{\delta(x,y)}{D}$$

Résoudre cette chose est **difficile** et se réalise par transformée de Fourier spatiale.

Comme $u(x,y) = u(r)$ ne dépend que de la distance à l'origine r, on utilise les transformées de Fourier directes et inverses d'une fonction radiale :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u(r)) = \hat{u}(\rho) &= 2\pi \int_0^{\infty} u(r) J_0(2\pi\rho r) r dr \\ \left(\mathcal{F}^{-1}\hat{u(\rho)}\right) = u(r) &= \pi \int_{\infty e^{\imath\pi}}^{\infty} \hat{u}(\rho) H_0^1(2\pi\rho r) \rho d\rho \end{aligned}$$

Plaque mince infinie couplée

La transformée de Fourier de l'équation vérifiée par le déplacement de la plaque couplée est donnée par :

$$\hat{u(\rho)} = \frac{1}{D} \frac{\imath K(\rho) D}{\left(16\pi^4\rho^4 - k_p^4\right) \imath K(\rho) D + 2\omega^2 \rho_f}, K^2(\rho) = k_f^2 - 4\pi^2\rho^2, \Im K(\rho) > 0$$

On inverse cette relation en appliquant le théorème des résidus :

$$u(r) = 2\imath\pi^2 \frac{1}{D} \sum_{n=1}^{3} A_n \mathrm{H}_0^1(k_n r)$$

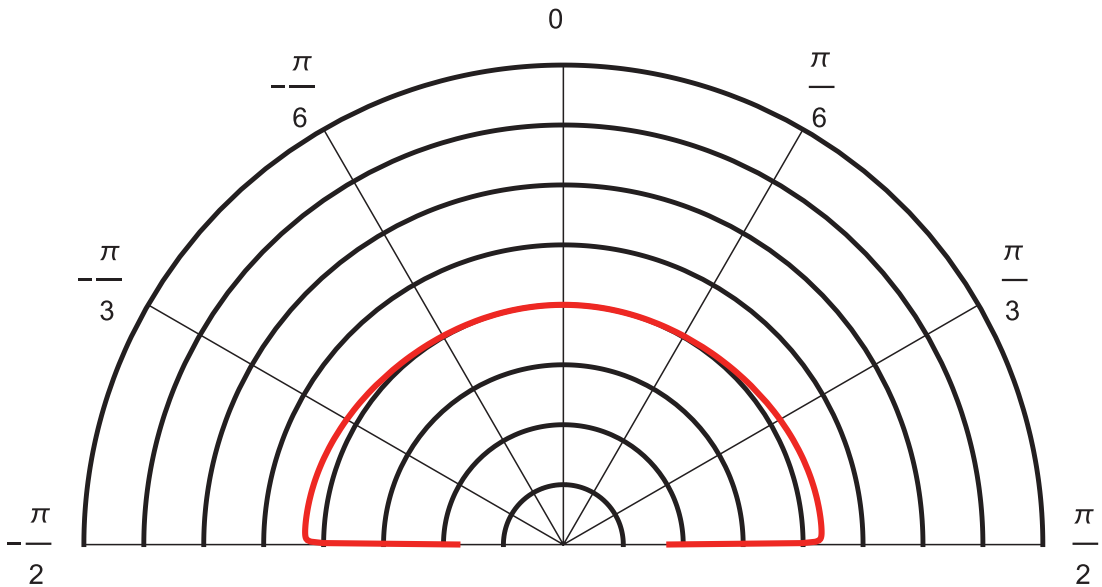
k_n : racines de l'équation de dispersion. Les A_n s'expriment à partir de la relation de dispersion.
Le rayonnement en champ lointain de la plaque s'obtient à partir de $\hat{u}(k_f \sin\theta/(2\pi))$

$$p^+(M) \approx -2\omega^2\rho_0 \frac{\mathrm{e}^{\imath k_f r}}{4\pi r} \frac{\imath k_f \cos\theta}{\left(k_f^4 \sin^4\theta - k_p^4\right) \imath D k_f \cos\theta + 2\omega^2\rho_0}$$

Cette fonction présente un maximum marqué lorsque le dénominateur est minimum, c'est à dire pour $k_f^4 \sin^4\theta = k_p^4$. Ce qui correspond à un angle $\theta_M = \arcsin k_p/k_f$, soit $\theta_M = \arcsin 1/M$. $M = c_p/c_f$, nombre de Mach. Nous obtenons ainsi en régime supersonique un angle (de Mach) pour lequel la plaque présente un maximum de directivité.

Plaque mince infinie couplée

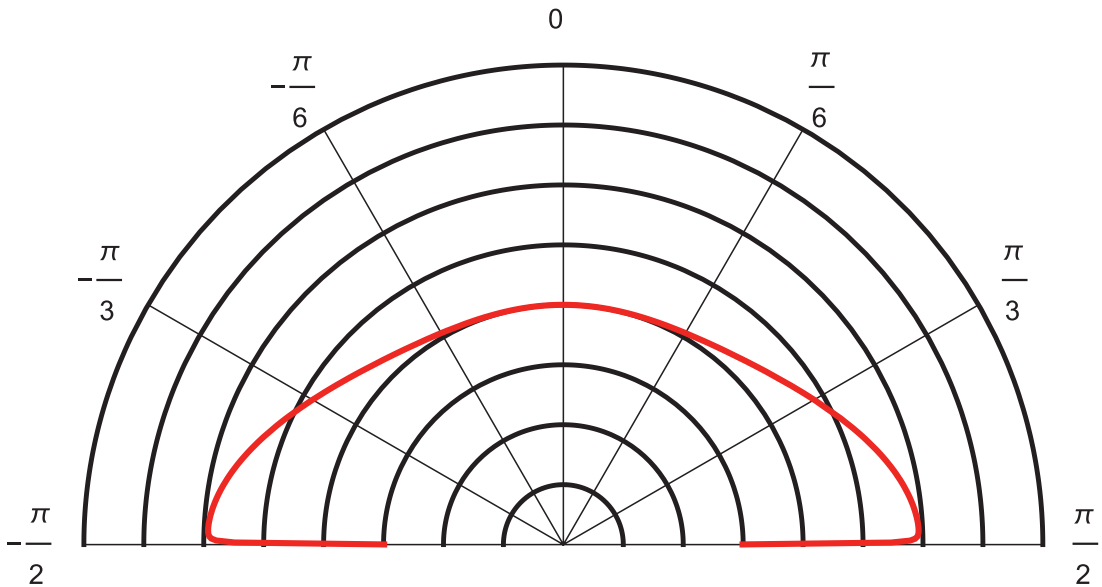
Directivité de la plaque normalisée par la directivité à $\theta = 0$ pour une plaque en acier dans l'air $f_c = 1216$ Hz.



Directivité de la plaque à 500Hz

Plaque mince infinie couplée

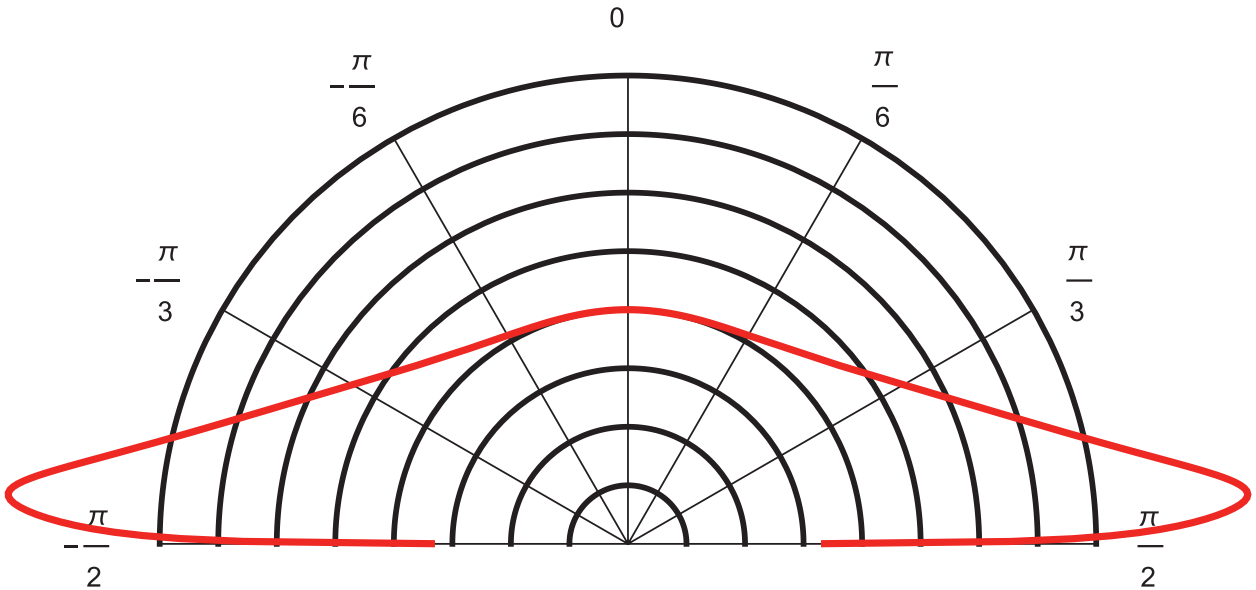
Directivité de la plaque normalisée par la directivité à $\theta = 0$ pour une plaque en acier dans l'air $f_c = 1216$ Hz.



Directivité de la plaque à 1000Hz

Plaque mince infinie couplée

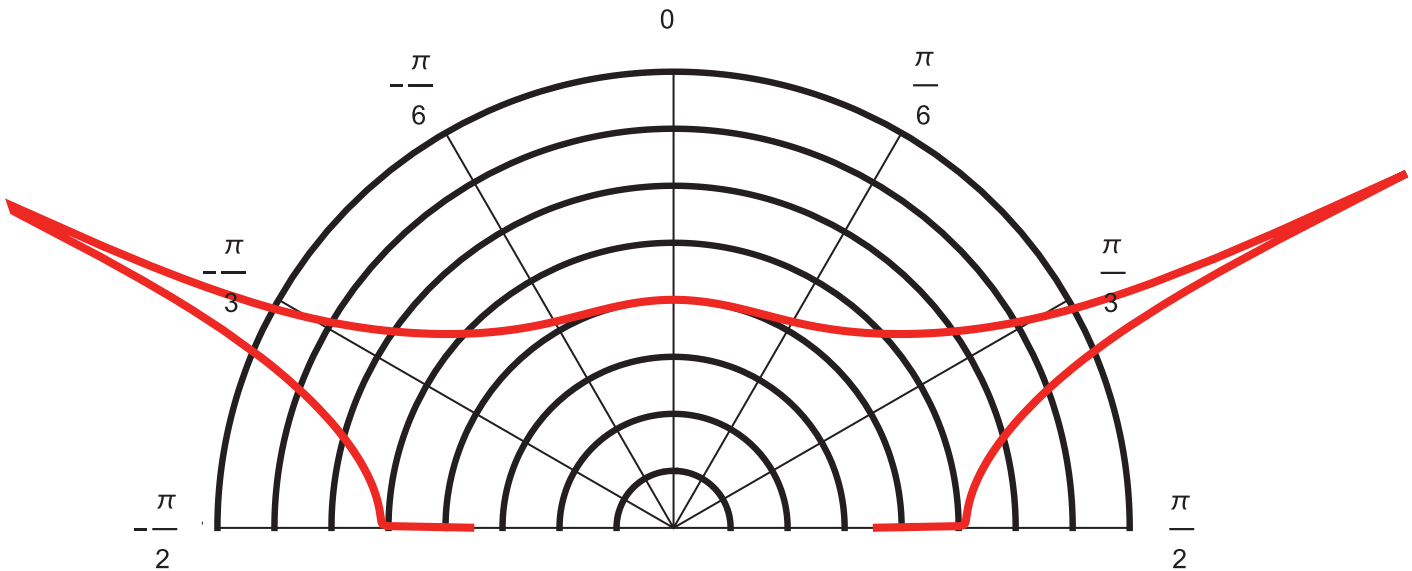
Directivité de la plaque normalisée par la directivité à $\theta = 0$ pour une plaque en acier dans l'air $f_c = 1216$ Hz.



Directivité de la plaque à 1216Hz ($\theta_M = 89,7^o = \pi/2,01$ rad)

Plaque mince infinie couplée

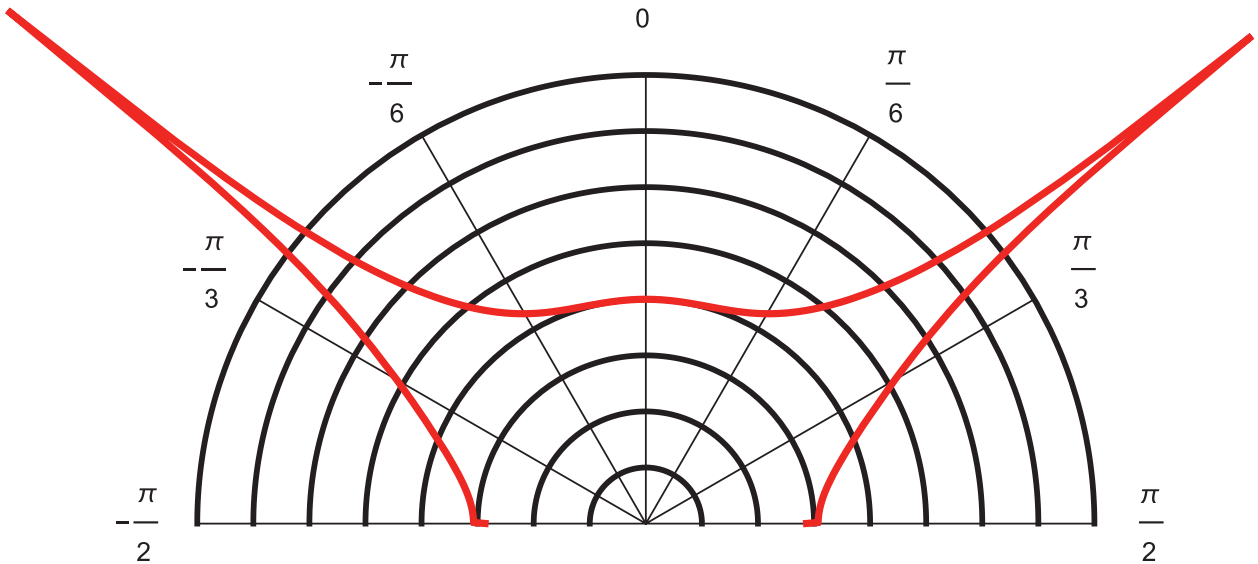
Directivité de la plaque normalisée par la directivité à $\theta = 0$ pour une plaque en acier dans l'air $f_c = 1216$ Hz.



Directivité de la plaque à 1500Hz ($\theta_M = 64,2^o = \pi/2,8$ rad)

Plaque mince infinie couplée

Directivité de la plaque normalisée par la directivité à $\theta = 0$ pour une plaque en acier dans l'air $f_c = 1216$ Hz.



Directivité de la plaque à 2000Hz ($\theta_M = 51.2^o = \pi/3,51$ rad)

Plaque mince finie couplée

Ce problème est **extrêmement difficile** à résoudre. En pratique, il n'existe aucune méthode exacte permettant de le résoudre.

Seules des méthodes numériques sont aptes à proposer des solutions approchées.

On peut toutefois, dans le cas de structures en métal au contact d'air calculer indépendamment la réponse d'une plaque amortie par développement modal dans le vide puis calculer sa pression rayonnée à partir de l'intégrale de Kirchhoff-Helmholtz

Aéro-vibroacoustique
(interaction structure vibrante - fluide en mouvement)

Plaque mince finie excitée par une couche limite turbulente

Hypothèses :

- Plaque rectangulaire à bord appuyés (solution simple)
- Pas d'influence du fluide sur la vibration de la structure (couplage fluide-léger)
- Pas d'influence de la vibration de la plaque sur la couche limite turbulent (CLT pleinement développée)
- CLT décrite comme un processus aléatoire
- Pression pariétale turbulente décrite par un modèle de type Corcos (variables séparées)

Plaque mince finie excitée par une couche limite turbulente

Une réalisation de la CLT (processus aléatoire) est $f(M,t)$. $F(M,\omega)$ est sa transformée de Fourier temporelle. On nomme $\Gamma(M,M',\omega)$ le noyau de Green de la plaque finie. La transformée de Fourier d'une réalisation du déplacement est donnée par

$$u(M,\omega) = \int F(Q,\omega)\Gamma(M,Q,\omega)\mathrm{d}Q$$

Une réalisation de l'interspectre du déplacement est donnée par

$$u(M,\omega)u^*(M',\omega) = \int\int \Gamma(M,Q,\omega)F(Q,\omega)F^*(Q',\omega)\Gamma^*(M',Q',\omega)\mathrm{d}Q\mathrm{d}Q'$$

On moyenne ce spectre dans le domaine des fréquences. On obtient une densité interspectrale du déplacement $S_u(M,M',\omega) = \overline{u(M,\omega)u^*(M',\omega)}$.
Seul $F(Q,\omega)$ est aléatoire, on obtient

$$S_u(M,M',\omega) = \int\int \Gamma(M,Q,\omega)\overline{F(Q,\omega)F^*(Q',\omega)}\Gamma^*(M',Q',\omega)\mathrm{d}Q\mathrm{d}Q'$$

$S_F(Q,Q',\omega) = \overline{F(Q,\omega)F^*(Q',\omega)}$ est la densité interspectrale de fluctuation de pression pariétale turbulente.

Plaque mince finie excitée par une couche limite turbulente

Comment décrire $S_F(Q, Q', \omega)$?

$$S_u(M, M', \omega) = S_{pp}(Q, \omega) C(Q, Q', \omega) \mathrm{e}^{\imath \phi(Q, Q', \omega)}$$

- $S_{pp}(Q, \omega)$: spectre ponctuel
- $C(Q, Q', \omega)$: cohérence (similarité) de la pression mesurée entre Q et Q'
- $\phi(Q, Q', \omega)$: relation de phase entre Q et Q'

Au dessus d'un plan avec un écoulement suivant x, on a

- $S_{pp}(Q, \omega)$: bruit blanc de niveau proportionnel au carré de la vitesse d'écoulement
- $C(Q, Q', \omega)$ liée à des échelles de longueurs L_x et L_y qui dépendent des séparations $r - x = x - x'$ et $r_y = y - y'$
  $L_x(Q, \omega) = \int_0^\infty C(Q, r_x, 0, \omega) \mathrm{d}r_x$, $L_x > l_y$
- $\phi(Q, Q', \omega) = \omega r_x / U_c(\omega)$. : relation de phase entre Q et Q'

Plaque mince finie excitée par une couche limite turbulente

Modèle de Corcos
Modèle à variables séparées

$$\begin{aligned} S_F(Q,Q',\omega) &= S_{pp}(\omega)\mathrm{e}^{-|r_x|/L_x}\mathrm{e}^{-|r_y|/L_y}\mathrm{e}^{\imath\omega r_x/U_c(\omega)} \\ &= S_{pp}(\omega)\mathrm{e}^{-|r_x|\alpha_x\omega/U_c}\mathrm{e}^{-|r_y|\alpha_y\omega/U_c}\mathrm{e}^{\imath\omega r_x/U_c(\omega)} \end{aligned}$$

Les paramètres α_x, α_y, U_c et $S_{pp}(\omega)$ sont identifiés à partir de mesures. On choisit $\alpha_x = 0,25$, $\alpha_y = 1$ et $U_c = 0,75U_\infty$.
$S_{pp}(\omega)$ s'exprime souvent à partir des variables externes à l'écoulement $S_{pp}(\omega)U_\infty/(q_0^2\delta^*)$ vs $f\delta^*/U_\infty$ ou δ^* est l'épaisseur de déplacement de la CLT et $q_0 = 1/2\rho_0 U_\infty^2$. Cela revient à normaliser l'amplitude de la densité spectrale par la dynamique de l'écoulement dans une échelle temporelle construite à partir de la vitesse d'écoulement et de la taille de la CLT.

Dans la suite, nous prendrons $S_{pp}(\omega) = 1$ afin de mieux visualiser l'effet de la vitesse d'écoulement sur la réponse de la plaque.

Plaque mince finie excitée par une couche limite turbulente

Prenons l'exemple d'une plaque amortie (d'amortissement η) dans le vide dont le noyau de Green de la plaque est donné par la décomposition modale suivante

$$\Gamma(Q, Q', \omega) = \sum_{m,n} \frac{u_{mn}(Q) u_{mn}(Q')}{\rho_p h(\omega_{mn}^2(1 - \imath\eta) - \omega^2)}$$

ω_{mn} sont les valeurs propres et $u_{mn}(M)$ sont les modes propres.
La densité interspectrale de déplacement de la plaque est donnée par

$$\begin{aligned} S_u(M, M', \omega) &= \int \sum_{m,n} \frac{u_{mn}(M) u_{mn}(Q')}{\rho_p h(\omega_{mn}^2(1 - \imath\eta) - \omega^2)} S_F(Q, Q', \omega) \\ &\quad \times \sum_{i,j} \frac{u_{ij}^*(M') u_{ij}^*(Q')}{\rho_p h(\omega_{ij}^2(1 - \imath\eta) - \omega^2)^*} \mathrm{d}Q \mathrm{d}Q' \end{aligned}$$

$$S_u(M, M', \omega) = \sum_{m,n,i,j} \frac{u_{mn}(M) u_{ij}^*(M')(\omega, \alpha_x, \alpha_y, U_c)}{\rho_p^2 h^2(\omega_{mn}^2(1 - \imath\eta) - \omega^2)(\omega_{ij}^2(1 + \imath\eta) - \omega^2)} I_{mnij}$$

où $I_{mnij} = \int u_{mn}(Q') S_F(Q, Q', \omega) u_{ij}^*(Q') \mathrm{d}Q \mathrm{d}Q'$ représente la force généralisée qui excite la structure (une horreur à calculer !).

Plaque mince finie excitée par une couche limite turbulente

Les modes propres de la plaque sont de la forme $u_{mn}(x,y) = X_m(x)Y_m(y)$. Comme le modèle d'excitation de la plaque est un modèle de type Corcos, la séparation des variables nous permet de transformer l'intégrale quadruple I_{mnij} très (vraiment très) coûteuse à calculer en un produit d'intégrales doubles

$$I_{mnij} = S_{pp}(\omega) I_{mi}(\omega, \alpha_x, U_c) J_{nj}(\omega, \alpha_y, U_c)$$

$$\begin{aligned} I_{mi}(\omega, \alpha_x, U_c) &= \iint X_m(x) X_i(x') \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_x \omega |x-x'|}{U_c}} \mathrm{e}^{\imath \frac{\omega(x-x)}{U_c}} \mathrm{d}x\mathrm{d}x' \\ J_{nj}(\omega\, \alpha_y, U_c) &= \iint Y_n(y) Y_j(y') \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_y \omega |y-y'|}{U_c}} \mathrm{d}y\mathrm{d}y' \end{aligned}$$

$I_{mi}(\omega, \alpha_x, U_c)$ et $J_{nj}(\omega\, \alpha_y, U_c)$ sont calculables analytiquement. Par exemple :

$$J_{nn}(\omega\, \alpha_y, U_c) = \frac{L_y^2 U_c \left(b^3 \alpha_y^3 \omega^3 + \pi^2 n^2 U_c^2 \left(L_y \alpha_y \omega + U_c \left(2 - 2(-1)^n \exp^{-\frac{L_y \alpha_y \omega}{U_c}} \right) \right) \right)}{\left(L_y^2 \alpha_y^2 \omega^2 + \pi^2 n^2 U_c^2 \right)^2}$$

Plaque mince finie excitée par une couche limite turbulente

Lorsque que l'on s'intéresse à la densité spectrale du déplacement de la plaque, on obtient

$$S_u(M,\omega) = \sum_{m,n,i,j} \frac{X_m(x)Y_m(y)X_i(x)Y_i(y)}{\rho_p^2 h^2(\omega_{mn}^2(1-\imath\eta)-\omega^2)(\omega_{ij}^2(1+\imath\eta)-\omega^2)} I_{mnij}$$

La moyenne de cette densité sur la plaque est : $S_u(\omega) = 1/A \int\int S_u(x,y,\omega)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où A est la surface occupée par la plaque.

L'orthonormalité des modes de plaque nous permet d'annuler les termes croisés pour ne retenir qu'une somme double

$$S_u(\omega) = \sum_{m,n} \frac{I_{mm}(\omega,\alpha_x,U_c)J_{nn}(\omega\,\alpha_y,U_c)}{\rho_p^2 h^2(\omega_{mn}^2(1-\imath\eta)-\omega^2)^2}$$

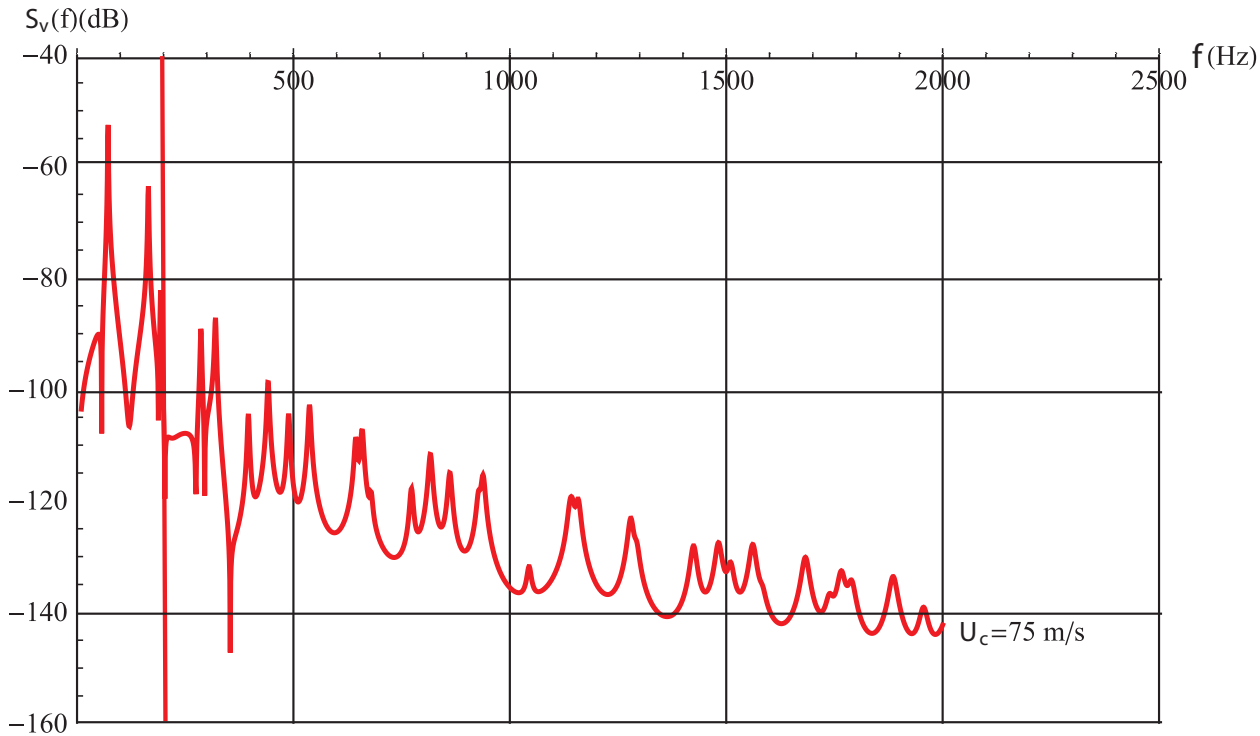
Cette réponse est maximale pour $\omega_{mn} = \omega$ et pour $I_{mm}(\omega,\alpha_x,U_c)$ et $J_{nn}(\omega\,\alpha_y,U_c)$ maximales, ce qui arrive pour $k_x = \omega/U_c$ voisin de $k_{mn} = \sqrt{\omega_{mn}\sqrt{\rho_p h/D}}$.
On montre qu'il existe une fréquence analogue à la fréquence critique (coïncidence des vitesses d'ondes) telle qu'il y ait coïncidence hydrodynamique : $U_c(\omega_c) = c_f(\omega_c)$ soit $\omega_c = U_c^2\sqrt{\rho_p h/D}$.

Plaque mince finie excitée par une couche limite turbulente

Plaque en aluminium $0,58 \times 0,42 \times 0,003$ m^3, $U_\infty = 100$ m/s, 200 m/s, 300 m/s.

$f_c = 200$ Hz pour $U_c = 75$ m/s, $f_c = 800$ Hz pour $U_c = 150$ m/s et $f_c = 1800$ Hz pour $U_c = 225$ m/s.

Densité spectrale moyenne de vitesse de la plaque $S_v(\omega) = -\omega^2 S_u(\omega)$:



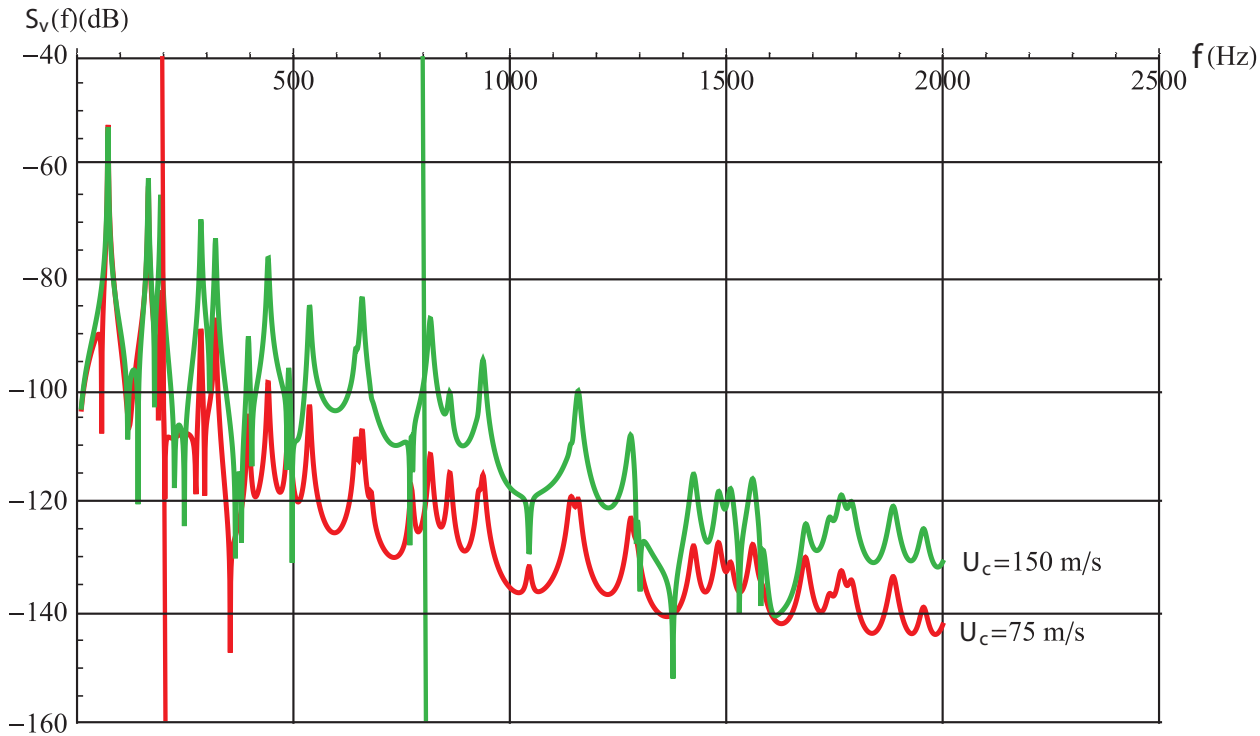
Densité spectrale moyenne de vitesse d'une plaque excitée par une CLT

Plaque mince finie excitée par une couche limite turbulente

Plaque en aluminium $0,58 \times 0,42 \times 0,003$ m^3, $U_\infty = 100$ m/s, 200 m/s, 300 m/s.

$f_c = 200$ Hz pour $U_c = 75$ m/s, $f_c = 800$ Hz pour $U_c = 150$ m/s et $f_c = 1800$ Hz pour $U_c = 225$ m/s.

Densité spectrale moyenne de vitesse de la plaque $S_v(\omega) = -\omega^2 S_u(\omega)$:



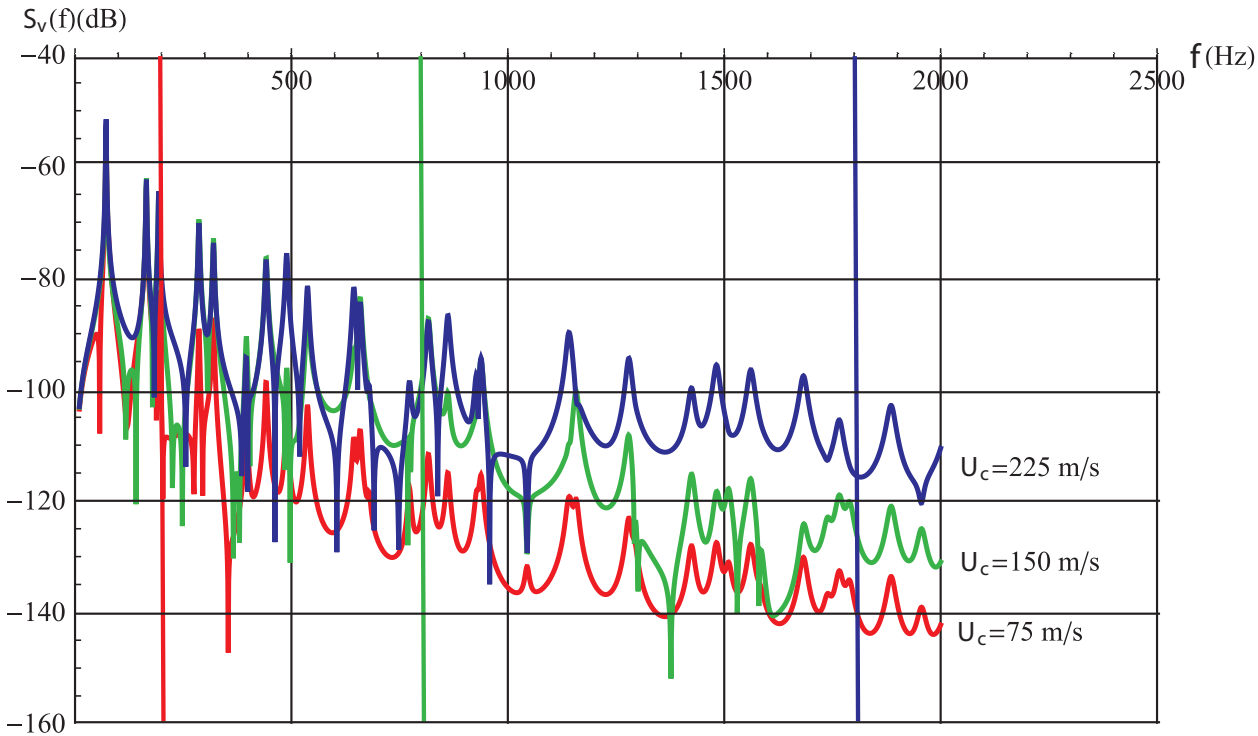
Densités spectrales moyennes de vitesse d'une plaque excitée par une CLT

Plaque mince finie excitée par une couche limite turbulente

Plaque en aluminium $0,58 \times 0,42 \times 0,003$ m^3, $U_\infty = 100$ m/s, 200 m/s, 300 m/s.

$f_c = 200$ Hz pour $U_c = 75$ m/s, $f_c = 800$ Hz pour $U_c = 150$ m/s et $f_c = 1800$ Hz pour $U_c = 225$ m/s.

Densité spectrale moyenne de vitesse de la plaque $S_v(\omega) = -\omega^2 S_u(\omega)$:



Densités spectrales moyennes de vitesse d'une plaque excitée par une CLT

Ballottement

Toute structure de section non circulaire est susceptible de subir un effet de ballottement : câbles électriques chargés de glace, tabliers de ponts dans le vent, tours de refroidissement, piles de ponts dans le courant, ailes et aubes de turbines, aile d'avion.

Cet effet est causé par une variation des forces de portance et de traînée des sections non circulaires lors de mouvements $\Rightarrow$ oscillation auto-entretenue.

Hypothèses :

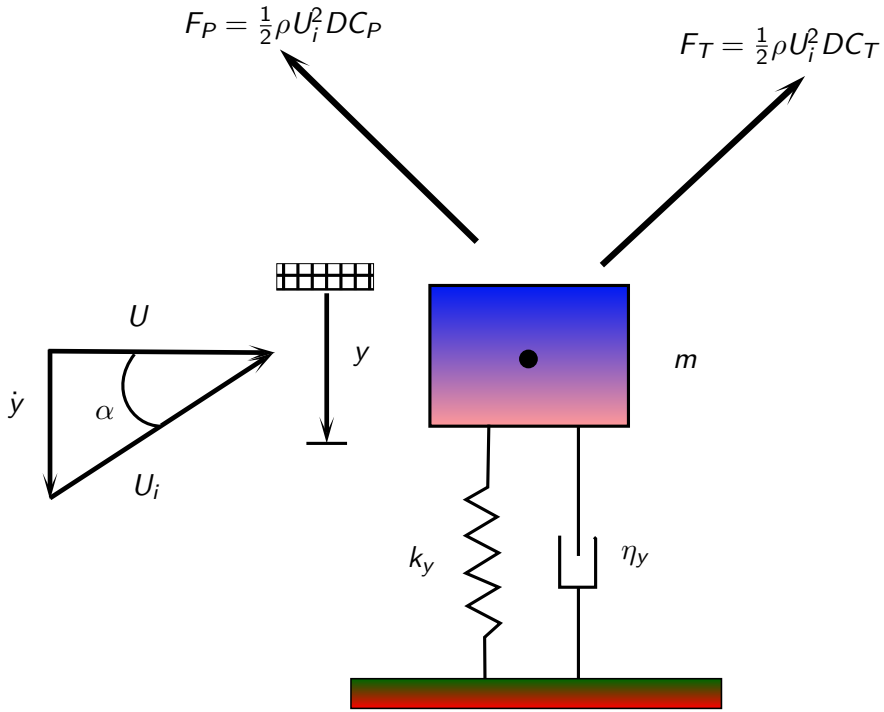
- régime établi : les forces induites par le mouvement du fluide sont uniquement dues à la vitesse instantanée.
- le mouvement de la structure ne modifie pas l'écoulement.
- modèle mécanique 1-D (m, k_y, c_y) de pulsation propre $\omega_0^2 = k_y/m$
- écoulement uniforme constant de vitesse U d'un fluide de masse ρ_0.

$c_y = 2m\zeta_y\omega_0$ caractérise l'amortissement et ζ_y est le facteur d'amortissement $(\zeta_y \approx 0,05)$ avec

$$\zeta_y = \frac{1}{2Q} = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{\eta}{2} \text{ si } \eta \ll 1$$

Q le facteur de qualité, $\delta = \log x(t) \left[x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right]$: décrément logarithmique, η : facteur de perte.

Ballottement



Ballottement

Les forces en présence

- force par unité de longueur de portance $F_P = \frac{1}{2}\rho_0 U_i^2 D C_P$
- force par unité de longueur de traînée $F_T = \frac{1}{2}\rho_0 U_i^2 D C_T$

D représente une longueur caractéristique du corps.

On cherche un modèle des forces aérodynamiques à faible incidence

$\Rightarrow$ Stabilité étudiée autour de l'équilibre du modèle

- $\dot{y}$: vitesse verticale (> 0 vers le bas)
- $\alpha = \arctan(\dot{y}/U)$:angle d'incidence du fluide
- $U_i^2 = U^2 + \dot{y}^2$: vitesse incidente résultante
- F_y force verticale : résultante des forces de traînée et de portance

$$\begin{aligned} F_y &= -F_P \cos\alpha - F_T \sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}\rho_0 U^2 D C_y \end{aligned}$$

$C_y = -U_i^2/U^2 (C_P \cos\alpha + C_T \sin\alpha)$ dépend de la forme du corps, de l'angle d'incidence et du nombre de Reynolds.

Ballottement

Pour les faibles angles d'incidence $\alpha \ll 1$, U_i et C_y peuvent être développés en série de Taylor.

- On a : $\alpha = \arctan(\dot{y}/U) \Rightarrow \tan\alpha = \dot{y}/U$, or $\tan x = x + x^3/3 + \cdots$.
  Donc $\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) = \dot{y}/U \Rightarrow \alpha = \dot{y}/U + \mathcal{O}(\alpha^2)$
- De $\dot{y} = \alpha U + \mathcal{O}(\alpha^2)$, on tire $U_i^2 = U^2 + \dot{y}^2 \Rightarrow U_i^2 = U^2 + \mathcal{O}(\alpha^2)$
- On cherche

$$C_y(\alpha) = C_y(\alpha)|_{\alpha=0} + \left[\frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Par définition $C_y = -U_i^2/U^2(C_P(\alpha)\cos\alpha + C_T(\alpha)\sin\alpha)$. Or

$$U_i^2/U^2 = 1 + \mathcal{O}(\alpha^2) \Rightarrow C_y(\alpha)|_{\alpha=0} = C_P(\alpha)|_{\alpha=0}$$

comme $\alpha = \dot{y}/U + \mathcal{O}(\alpha^2)$, on obtient

$$C_y(\alpha) = -C_P(\alpha)|_{\alpha=0} + \left[\frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} \frac{\dot{y}}{U} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Ballottement

L'équation du mouvement du système masse-ressort amortisseur soumis à la force verticale est donnée par

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + 2m\zeta_y\omega_0\dot{y} + k_y y &= F_y \\ &= \frac{1}{2}\rho_0 U^2 D C_y \\ &= -\frac{1}{2}\rho_0 U^2 D C_P(\alpha)|_{\alpha=0} + \frac{1}{2}\rho_0 U^2 D \left[\frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} \frac{\dot{y}}{U} + \mathcal{O}(\alpha^2), \end{aligned}$$

On linéarise cette équation par rapport à α et on obtient

$$m\ddot{y} + 2m\omega_0 \left(\zeta_y - \frac{\rho_0 U D}{4m\omega_0}\left[\frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0}\right)\dot{y} + k_y y = -\frac{1}{2}\rho_0 U^2 D C_P(\alpha)|_{\alpha=0}$$

$\zeta_T = \zeta_y - \frac{\rho_0 U^2 D}{4m\omega_0}\left[\frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0}$: amortissement du système.

S $\zeta_T < 0$: mouvement instable.

Ballottement

Le mouvement résultant, qui est la somme d'un terme constant et d'une oscillation amortie/croissante, s'écrit :

$$y = \frac{1}{2k_y}\rho_0 U^2 D C_P(\alpha)|_{\alpha=0} + A_y e^{-\zeta_T \omega_0 t} \sin\left[\omega_0\sqrt{1-\zeta_T^2}t + \phi_y\right]$$

- Si $\zeta_T < 0$: l'amplitude du mouvement augmente au cours du temps
- Si $\zeta_T > 0$: le mouvement est stable.

Si $\zeta_y = 0$, $\zeta_T = -\frac{\rho_0 U^2 D}{4m\omega_0}\left[\frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=0}$ le mouvement sera stable pour

$$\frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial\alpha} < 0.$$

Pour toute section non circulaire, il existe un angle d'incidence α pour lequel $\frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial\alpha} > 0$.

L'instabilité apparaît lorsque $\zeta_T = 0$ soit encore pour une vitesse critique U_c telle que

$$U_c = \frac{4m\omega_0\zeta_y}{\rho_0 D}\frac{1}{\frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial\alpha}}$$

Exemples

- pour une section carrée, on a $\partial C_y(\alpha)/\partial\alpha \approx 3$ (instable) pour $Re = 10^5$
- pour un profil NACA, on a $\partial C_y(\alpha)/\partial\alpha \approx -6$ (stable) pour $Re > 10^3$
- pour une section rectangulaire de hauteur D et de longueur $2/3D$, on a $\partial C_y(\alpha)/\partial\alpha \leq 0$ (partiellement stable)
- pour une section rectangulaire de hauteur $2/3D$ et de longueur D, on a $\partial C_y(\alpha)/\partial\alpha > 0$ (instable).

Ballottement

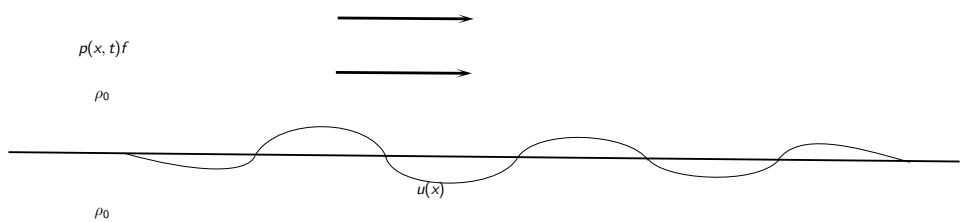
Ballottement d'une structure élastique est en contact avec un écoulement.
Cette instabilité résulte d'un échange d'énergie entre l'écoulement et la structure élastique.

- fouettement d'un tuyau d'arrosage
- claquement des drapeaux dans le vent
- galop des ailes.

L'essentiel du phénomène (l'échange d'énergie entre l'écoulement et la vibration de la structure) peut être décrit pour une géométrie simple en présence d'écoulement potentiel (incompressible).

Mettre en évidence l'apparition d'ondes de paroi

- convectivement instables (l'écoulement transporte les ondes vers l'aval et localement la réponse du système finit par décroître)
- absolument instables (les ondes envahissent tout le domaine et l'amplitude de la structure ne fait que croître).



Ballottement

Exemple élémentaire (mais non simple !) d'une la plaque/membrane infinie dans un écoulement. Les équations du modèle sont (D rigidité de flexion, T tension de membrane :

$$D\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x,t) - T\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + m\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = p(x, y=0, t)$$

$$\Delta\phi(x,y,t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y=0, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)$$

avec une conservation de l'énergie sur $\phi(x,y,t)$

$\phi(x,y,t)$ est relié à la pression dans le fluide par la relation
$p(x,y,t) = -\rho_0\left(\frac{\partial\phi(x,y,t)}{\partial t} + U_0\frac{\partial\phi(x,y,t)}{\partial x}\right)$.
On s'intéresse aux ondes qui se propagent dans la structure sous la forme, avec $k \in R$, $u(x,t) = \exp(\imath kx)\exp(-\imath\omega t)$.

Ballottement

La condition de continuité des déplacements normaux à la paroi nous donne donc pour le potentiel :

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y = 0, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = (-\imath\omega + U_0 \imath k) \mathrm{e}^{\imath kx} \mathrm{e}^{-\imath\omega t}$$

Soit donc

$$\phi(x, y, t) = \frac{(-\imath\omega + U_0 \imath k)}{\gamma} \mathrm{e}^{\imath kx + \gamma y} \mathrm{e}^{-\imath\omega t},$$

l'équation du potentiel $\Delta\phi(x, y, t) = 0$ donne $(-k^2 + \gamma^2)\mathrm{e}^{\imath kx + \gamma y}\mathrm{e}^{-\imath\omega t} = 0$ Soit $\gamma = |k|$. De là, on en déduit que

$$p(x, y = 0, t) = -\rho_0 \left(\frac{\partial\phi(x, y, t)}{\partial t} + U_0 \frac{\partial\phi(x, y, t)}{\partial x}\right) = \rho_0 \frac{(\omega - U_0 k)^2}{|k|} \mathrm{e}^{\imath kx} \mathrm{e}^{-\imath\omega t},$$

La relation de dispersion de la plaque tendue couplée

$$\mathcal{D}(\omega, k) = Dk^4 + Tk^2 - m\omega^2 - \rho_0 \frac{(\omega - U_0 k)^2}{|k|} = 0.$$

Ballottement

On peut écrire la relation de dispersion sous la forme très générale

$$K(k) - \omega^2 M(k) - C(k)(\omega - U_0 k)^2 = 0$$

- $K(k)$: rigidité mécanique
- $M(k)$: masse mécanique
- $C(k)$: effet de masse et de rigidité apportés par le fluide

On résout la relation de dispersion pour ω et on obtient très simplement

$$\omega^{\pm} = \frac{U_0 k C(k) \pm \sqrt{K(k)(M(k)+C(k)) - U_0^2 k^2 M(k) C(k)}}{M(k)+C(k)},$$

Système stable ssi $\Im(\omega) \leq 0 \Rightarrow K(k)(M(k)+C(k)) - U_0^2 k^2 M(k) C(k) \geq 0$.
Pour un nombre d'onde k réel, la vitesse d'écoulement U_c au delà de laquelle on a instabilité est

$$U_c = \min_{k \in R} \left(\frac{K(k)(M(k)+C(k))}{k^2 M(k) C(k)} \right)^{1/2},$$

Pour $U_0 < U_c$, le système reste stable.

La réponse impulsionnelle $G(x,t)$ caractérise la stabilité. Si $\lim_{t\to\infty} |G(0,t)| \to 0$ on parle d'instabilité convective et si $\lim_{t\to\infty} |G(0,t)| \to \infty$ on parle d'instabilité absolue.

Ballottement

Comme $G(x,t) \propto \exp(\imath k_0 x)\exp(-\imath\omega_0 t)$, on s'intéresse à ω_0 et à k_0 tels que

$$\mathcal{D}(\omega_0, k_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k}(\omega_0, k_0) = 0$$

La nature de l'instabilité dépend de $\Im(\omega_0)$.

- absolue si $\Im(\omega_0) > 0$
- convective si $\Im(\omega_0) < 0$

La vitesse à partir de laquelle l'instabilité convective devient absolument instable est nommée vitesse de transition U_T, on peut montrer (difficile !) que celle-ci apparaît comme la racine triple de la relation de dispersion

$$\mathcal{D}(\omega_T, k_T, U_T) = 0, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k}(\omega_T, k_T, U_T) \text{ et } \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial k^2}(\omega_T, k_T, U_T) = 0$$

toujours pour k_T réel.

Ballottement

Pour le cas de la plaque sans tension, on a la relation de dispersion

$$\tilde{k}^4 - \tilde{\omega}^2 - \frac{(\tilde{\omega} - \tilde{U}\tilde{k})^2}{|\tilde{k}|} = 0.$$

avec $\tilde{k} = km/\rho_0$, $\tilde{\omega} = \omega m^{5/2}/\rho_0^2 D^{1/2}$ et $\tilde{U} = Um^{3/2}/(\rho_0 D^{1/2})$.

L'instabilité convective apparaît pour

$$\tilde{U}_C = \min_{\tilde{k} \in R} \left(\frac{\tilde{k}^4 \left(1 + \frac{1}{|\tilde{k}|}\right)}{k^2 \left(\frac{1}{|\tilde{k}|}\right)} \right)^{1/2} = \min_{\tilde{k} \in R} \left(\tilde{k}^2 \left(|\tilde{k}| + 1 \right) \right)^{1/2}$$

soit $\tilde{U}_C = 0$: une plaque couplée à un écoulement présente toujours une instabilité convective du fait de sa nature dispersive (quelle que soit la fréquence, il y a toujours une onde qui se propage à une vitesse de phase non nulle).

La transition à l'instabilité absolue apparaît pour une

$$\tilde{U}_T = \frac{2^{1/2} 5^{5/4}}{3^{3/4}} \left(2 - \frac{\sqrt{15}}{2}\right)^{3/2} \approx 0,074$$

Ce qui en unité physique pour une plaque en acier de 1 cm d'épaisseur dans l'eau correspond à $U_0 \approx 0,074 * \rho_0 \sqrt{D}/m^{3/2} \approx 14 m/s$ soit environ 25 Knts qui est une valeur couramment atteinte par les navires. En général, les coques sont plus épaisses que 1cm ce qui décale la transition vers les hautes vitesses.

Ballottement

Pour la membrane tendue sans rigidité, on a la relation de dispersion

$$\tilde{k}^2 - \tilde{\omega}^2 - \frac{(\tilde{\omega} - \tilde{U}\tilde{k})^2}{|\tilde{k}|} = 0.$$

avec $\tilde{k} = km/\rho_0$, $\tilde{\omega} = \omega m^{3/2}/\rho_0 T^{1/2}$ et $\tilde{U} = Um^{1/2}/T^{1/2}$.

L'instabilité convective apparaît pour

$$\tilde{U}_C = \min_{\tilde{k} \in R} \left(\frac{\tilde{k}^2 \left(1 + \frac{1}{|\tilde{k}|}\right)}{k^2 \left(\frac{1}{|\tilde{k}|}\right)} \right)^{1/2} = \min_{\tilde{k} \in R} \left(|\tilde{k}| + 1\right))^{1/2}$$

soit $\tilde{U}_C = 1$: une membrane couplée à un écoulement ne présente une instabilité convective que lorsque la vitesse d'écoulement dépasse la vitesse de propagation des ondes dans la membrane ($c_t^2 = T/m$).

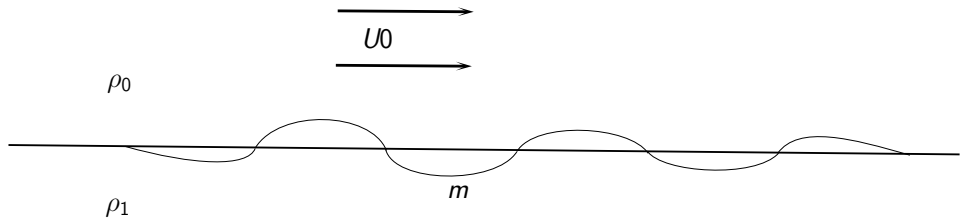
On montre que la transition à l'instabilité absolue apparaît pour une vitesse d'écoulement de

$$\tilde{U}_T = \left(6\sqrt{3} - 9\right)^{1/2} \approx 1,18.$$

Le seuil d'instabilité absolue est très proche de la vitesse de propagation des ondes dans la membrane. Ce qui explique pourquoi les voiles de bateau lorsqu'elles ne sont pas bordées (ou les drapeaux très faiblement tendus) claquent dans le vent et que la moindre tension d'écoute fait cesser les oscillations du tissu et les claquements.

Ballottement

Les résultats précédents peuvent servir à interpréter l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui apparaît à l'interface entre deux fluides séparés par une surface infiniment mince qui possède une tension surfacique qui correspond à une membrane sans masse.



La relation de dispersion de la surface de séparation, considérée comme une membrane de masse m est simplement la relation précédente dans laquelle on tient compte d'un fluide supplémentaire au repos

$$Tk^2 - \left(m + \rho_1 \frac{1}{|k|} \right) \omega^2 - \rho_0 \frac{(\omega - U_0 k)^2}{|k|} = 0.$$

Bien évidemment le cas $m = 0$ modélise l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. On adimensionnalise cette équation par rapport aux grandeurs liées au fluide en mouvement de masse volumique ρ_0. On a

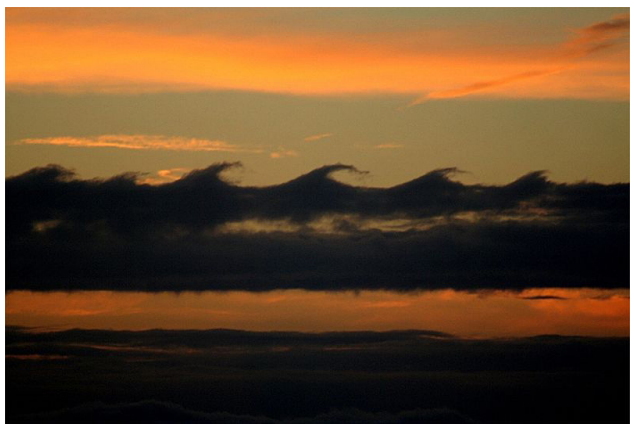
$$\hat{k}^2 - \left(1 + \frac{\chi}{|\hat{k}|} \right) \hat{\omega}^2 - \frac{(\hat{\omega} - \hat{U}\hat{k})^2}{|\hat{k}|} = 0,$$

où $\chi = \rho_1 / \rho_0$.

Ballottement

La vitesse critique est

$$\hat{U}_C = \min_{\tilde{k} \in R} \left(\frac{\hat{k}^2 + \hat{k}(1+\chi)}{\hat{k} + \chi} \right)^{1/2}.$$

$\hat{U}_C$ varie brutalement de $\hat{U}_C = 1$ pour $\chi = 0$ qui correspond à l'écoulement au dessus d'une membrane flexible à $\hat{U}_C = 0$ dès que le domaine au repos existe (*ie* $\chi > 0$).

On peut montrer que dès que $\chi > 1/3$, l'instabilité est toujours absolue. En pratique, cette instabilité peut expliquer la formation d'ondes à l'interface de deux fluides en mouvements comme les vagues à la surface de la mer ou les oscillations de nuages observées à l'interface de couches atmosphériques