

Une nouvelle méthode d'interface en dimension 2 : application aux équations de l'acoustique.

Joël Piraux - Bruno Lombard

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique
31, chemin Joseph Aiguier - 13402 MARSEILLE CEDEX 20

Résumé : Les solutions numériques d'équations aux dérivées partielles, calculées par des schémas classiques, sont généralement dégradées au voisinage des interfaces. Pour améliorer la précision du calcul, il est intéressant de coupler le schéma numérique choisi à une méthode d'interface. Celle-ci prend en compte les conditions de continuité aux interfaces. Nous étendons ici en dimension 2 l' "Explicit Simplified Interface Method" (ESIM) et l'appliquons aux équations de l'acoustique.

1 Introduction

On s'intéresse à la résolution numérique des équations de l'acoustique en présence d'interfaces. En dimension 2, une interface est une courbe au passage de laquelle un ou plusieurs coefficients de l'équation aux dérivées partielles sont discontinus. Ces coefficients s'expriment en fonction de la masse volumique et de la célérité des ondes acoustiques, notées respectivement ρ et c : les milieux sont choisis ici homogènes par morceaux. L'interface Γ étant le lieu des points $M(x, y)$ annulant une fonction $\mathcal{F}(x, y)$, on écrit :

$$(\rho, c) = \begin{cases} (\rho^-, c^-) & \text{si } \mathcal{F}(x, y) < 0 \\ (\rho^+, c^+) & \text{si } \mathcal{F}(x, y) > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Les schémas de différences finies ou volumes finis utilisent les valeurs de ρ et c aux noeuds du maillage ou des moyennes de ces coefficients sur les mailles. Dans le cas où l'interface coupe les lignes du maillage (figure (1)), les schémas numériques classiques ne prennent pas en compte avec précision les caractéristiques géométriques et la position de l'interface par rapport aux noeuds du maillage.

De plus, les solutions sont irrégulières au passage d'une interface. Cela fait chuter l'ordre du schéma numérique choisi aux *points irréguliers*. Un point irrégulier est un point pour lequel le schéma utilise des valeurs en des points situés de l'autre côté de l'interface que lui. Il s'ensuit une perte de précision d'autant plus marquée que les contrastes sont importants et que le nombre d'interfaces est grand.

L'étude numérique de la propagation des ondes au voisinage des interfaces est alors dégradée.

L'utilisation aux points irréguliers d'une *méthode d'interface* améliore la précision du calcul. Les méthodes d'interface font reposer le calcul de la solution aux points irréguliers sur les conditions de continuité aux interfaces. L' "Immersed Interface Method" (IIM) de Zhang et LeVeque [3] revient à écrire un nouveau schéma de différences finies aux points irréguliers, schéma dont les coefficients sont obtenus par la technique des coefficients indéterminés. Malgré ses qualités, l'IIM introduit de la dispersion numérique, dégradant l'amélioration qu'elle apporte. Cela nous a conduit à développer, en dimension 1, une nouvelle méthode d'interface, l' "Explicit Simplified Interface Method" (ESIM) [2]. Le but de la présentation est d'étendre cette méthode en dimension 2.

2 Equations pour l'acoustique

2.1 Lois de conservation

On note u et v les composantes de la vitesse acoustique \vec{w} dans un repère cartésien (O, x, y) , et p la pression acoustique. La linéarisation des équation de la mécanique dans le cas d'un fluide parfait homogène et au repos conduit à :

$$\begin{aligned} \rho u_t + p_x &= 0 \\ \rho v_t + p_y &= 0 \\ p_t + \rho c^2 (u_x + v_y) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

On pose $U(x, y, t) = {}^t(u, v, p)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

et on obtient le système hyperbolique du premier ordre :

$$U_t + AU_x + BU_y = 0. \quad (4)$$

2.2 Schéma numérique

Pour résoudre (4), nous utilisons un schéma de différences finies d'ordre 2 en temps et en espace, le schéma de Lax-Wendroff. Le pas en espace $\Delta x = \Delta y$ et le pas de temps Δt sont choisis constants. Les points du maillage ont pour abscisses et ordonnées $x_i = i \Delta x$, $y_j = j \Delta y$ et les instants de calcul sont $t_n = n \Delta t$. La valeur numérique $U_{i,j}^{n+1}$, approximation de $U(x_i, y_j, t_{n+1})$, s'écrit :

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (A(U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n) \\ &+ B(U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n)) + \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (U_{i+1,j}^n \\ &+ U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 4U_{i,j}^n). \end{aligned} \quad (5)$$

De mise en oeuvre aisée, le schéma de Lax-Wendroff est utilisé ici pour présenter facilement l'ESIM. En pratique, on peut utiliser des schémas plus précis, comme les schémas TVD et WENO [2].

3 Conditions de saut

3.1 Repère local tangent à l'interface

On utilise ici une représentation paramétrique $(x = x(\tau), y = y(\tau))$ de l'interface Γ . Soit un point $P_0(x_0 = x(\tau_0), y_0 = y(\tau_0))$ de Γ . \vec{n}_0 est le vecteur normal à Γ en P_0 , de composantes $(-y'(\tau_0), x'(\tau_0))$. On définit le repère local direct (P_0, ξ, η) de telle sorte que l'axe des ξ est orienté selon \vec{n}_0 et l'axe des η tangent à l'interface (figure (1)). On note θ_0 l'angle $(\vec{Ox}, \vec{P_0\xi})$, tel que :

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 &= \frac{y'(\tau_0)}{\sqrt{x'^2(\tau_0) + y'^2(\tau_0)}}, \\ \sin \theta_0 &= \frac{-x'(\tau_0)}{\sqrt{x'^2(\tau_0) + y'^2(\tau_0)}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Pour un point M de coordonnées (x, y) dans le repère global (O, x, y) et de coordonnées (ξ, η) dans le repère local, on a les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} x = x_0 + \xi \cos \theta_0 - \eta \sin \theta_0 \\ y = y_0 + \xi \sin \theta_0 + \eta \cos \theta_0. \end{cases} \quad (7)$$

Pour ce point M , on désigne par $\vec{U} = {}^t(\bar{u}, \bar{v}, \bar{p})$ le vecteur des composantes de la vitesse acoustique et de la pression acoustique dans le repère (P_0, ξ, η) , et on passe de $\vec{U}(\xi, \eta, t)$ à $U(x, y, t)$ par une matrice de rotation :

$$\begin{aligned} \vec{U}(\xi, \eta, t) &= Q_0^{-1} U(x, y, t), \\ \text{avec } Q_0 &= \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

P_0 étant fixé, Q_0 est une matrice constante. Par dérivation de (8) par rapport à ξ et η , et avec le changement de repère (7), on a en M :

$$\begin{aligned} \bar{U}_\xi &= Q_0^{-1} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} U_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} U_y \right) \\ &= Q_0^{-1} (U_x \cos \theta_0 + U_y \sin \theta_0), \\ \bar{U}_\eta &= Q_0^{-1} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} U_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} U_y \right) \\ &= Q_0^{-1} (-U_x \sin \theta_0 + U_y \cos \theta_0). \end{aligned} \quad (9)$$

3.2 Conditions de saut dans le repère local

L'inversion des formules de changement de repère (7) conduit à une représentation paramétrique $(\xi = \xi(\tau), \eta = \eta(\tau))$ de Γ dans le repère local (P_0, ξ, η) . En un point P de l'interface, de coordonnées $(\xi(\tau), \eta(\tau))$ dans le repère local, la pression acoustique et la composante de la vitesse acoustique normale à Γ sont continues au passage de l'interface :

$$[\vec{n} \cdot \vec{u}] = \eta'(\tau) [\bar{u}] - \xi'(\tau) [\bar{v}] = 0, \quad [p] = 0. \quad (10)$$

$[f]$ désigne la différence des traces d'une fonction $f(\xi, \eta, t)$ en P et \vec{n} est le vecteur normal à Γ en P , de composantes $(-\xi'(\tau), \eta'(\tau))$ dans (P_0, ξ, η) .

La dérivation des relations (10) dans le repère local donne les conditions de saut reliant à tout instant les dérivées successives de $\vec{U}(\xi, \eta, t)$ par rapport à ξ et η de part et d'autre de l'interface. Au premier ordre de dérivation, et pour $P = P_0(\xi(\tau_0) = 0, \eta(\tau_0) = 0)$ (on a alors $\xi'(\tau_0) = 0$), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{U}^+ &= A_1 \bar{U}^-, \\ \bar{U}_\eta^+ &= A_2 \bar{U}^- + A_3 \bar{U}_\eta^-, \\ \bar{U}_\xi^+ &= A_4 \bar{U}^- + A_5 \bar{U}_\eta^- + A_6 \bar{U}_\xi^-, \end{aligned} \quad (11)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= A_3 = \text{diag} \left(1, \frac{\rho^-}{\rho^+}, 1 \right), \\ A_2 &= \frac{\xi''(\tau_0)}{\eta'^2(\tau_0)} \left(\frac{\rho^-}{\rho^+} - 1 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_4 &= \frac{\xi''(\tau_0)}{\eta'^2(\tau_0)} \left(\frac{\rho^-}{\rho^+} - 1 \right) \text{diag} (-1, 1, 0), \\ A_5 &= \frac{\rho^-}{\rho^+} \left[\left(\frac{c^-}{c^+} \right)^2 - 1 \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_6 &= \text{diag} \left(\frac{\rho^- c^{-2}}{\rho^+ c^{+2}}, 1, \frac{\rho^+}{\rho^-} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Nous avons corrigé ici les formules de saut calculées par Zhang [3].

3.3 Conditions de saut dans le repère global

Le report dans les relations (11) des formules (8) et (9) appliquées pour le point P_0 conduit, en ce point P_0 , aux conditions de saut de part et d'autre de l'interface pour $U(x, y, t)$ et ses dérivées premières par rapport à x et y . En posant : $B_i = Q_0 A_i Q_0^{-1}$ ($i = 1, 6$), et :

$$C_1 = B_1,$$

$$C_2 = B_4 \cos \theta_0 - B_2 \sin \theta_0,$$

$$C_3 = B_3 \sin^2 \theta_0 - B_5 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + B_6 \cos^2 \theta_0,$$

$$C_4 = B_6 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + B_5 \cos^2 \theta_0 - B_3 \sin \theta_0 \cos \theta_0,$$

$$C_5 = B_2 \cos \theta_0 + B_4 \sin \theta_0,$$

$$C_6 = B_6 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - B_5 \sin^2 \theta_0 - B_3 \sin \theta_0 \cos \theta_0,$$

$$C_7 = B_3 \cos^2 \theta_0 + B_5 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + B_6 \sin^2 \theta_0, \quad (13)$$

les conditions de saut en P_0 exprimées dans le repère global s'écrivent :

$$U^+ = C_1 U^-,$$

$$U_x^+ = C_2 U^- + C_3 U_x^- + C_4 U_y^-, \quad (14)$$

$$U_y^+ = C_5 U^- + C_6 U_x^- + C_7 U_y^-.$$

4 ESIM

4.1 Principe de la méthode

Au lieu de construire un nouveau schéma aux points irréguliers, l'ESIM repose sur le calcul de *valeurs modifiées* de la solution en ces points, notées $U_{i,j}^*$. Les valeurs modifiées sont construites de telle sorte que les conditions de continuité soient vérifiées à l'interface, jusqu'à un certain ordre. En un point irrégulier, le schéma numérique utilise les valeurs modifiées aux points de l'autre côté de l'interface que lui à la place des valeurs numériques en ces points. Dans l'exemple de la figure (1), le schéma (5) couplé à l'ESIM s'écrit en (x_i, y_j) :

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} = & U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (A(U_{i+1,j}^* - U_{i-1,j}^n)) \\ & + B(U_{i,j+1}^* - U_{i,j-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (U_{i+1,j}^* \\ & + U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^* + U_{i,j-1}^n - 4U_{i,j}^n). \end{aligned} \quad (15)$$

En dimension 1, le calcul des valeurs modifiées est local [2] : en chaque interface, il fait intervenir un nombre de valeurs numériques dépendant seulement du schéma numérique utilisé et indépendant du nombre d'interfaces voisines. En dimension 2, nous en sommes venus à une détermination globale de toutes les valeurs modifiées. Les systèmes matriciels à résoudre sont beaucoup plus grands que dans le cas de l'IIM (laquelle conserve un traitement local en dimension 2) et dépendent de la taille de l'interface. Par contre, la stabilité du schéma obtenu est remarquable, même en présence de très forts contrastes.

4.2 Valeurs modifiées

Dans le cas de milieux identiques, la solution $U(x, y, t)$ est continue et régulière dans un voisinage de P_0 : on peut évaluer U , U_x et U_y en P_0 par interpolation de Lagrange d'ordre 2, basée sur les valeurs numériques aux points de la maille contenant P_0 .

Pour des milieux différents, U est irrégulière au voisinage de P_0 . On écrit deux estimations de U en P_0 par interpolation de Lagrange, une du côté du milieu - et une du côté du milieu +. L'estimation du côté - (resp. +) est basée sur les valeurs numériques aux points irréguliers de la maille contenant P_0 , du côté - (resp. +), et sur les valeurs modifiées aux points irréguliers de la maille contenant P_0 , du côté + (resp. -). L'application des conditions de saut (14) aux deux estimations conduit à trois relations, liant les valeurs numériques et les valeurs modifiées aux points irréguliers de la maille contenant P_0 .

4.3 Résolution numérique

La discussion précédente porte sur un seul point P_0 de l'interface. Pour obtenir l'ensemble des valeurs modifiées nécessaires au schéma numérique, il convient de suivre la même démarche en un ensemble de N_p points de Γ . Nous utilisons une répartition uniforme de ces points sur l'interface : celle-ci étant décrite par un paramètre $\tau \in [0, 2\pi]$, les points P_k ont pour coordonnées $P_k(x(\tau_k), y(\tau_k))$, avec $\tau_k = 2k\pi/N_p$, $k = 0 \dots N_p - 1$. En chaque point P_k , on doit :

- déterminer l'angle θ_k de rotation du repère local tangent à Γ en P_k (6) ;
- calculer les matrices C_1 à C_7 (13) ;
- repérer les points entourant P_k et écrire en P_k les interpolations de U , U_x et U_y du côté du milieu + et du côté du milieu - ;
- déduire les relations vectorielles (14) liant les valeurs modifiées et numériques en ces points.

Le nombre de points P_k doit être suffisant pour que chaque point irrégulier appartienne au moins une fois à une maille contenant un tel point P_k . De plus, le nombre d'équations doit être au moins égale au nombre d'inconnues, soit $N_p \geq N_{irr}/3$ (N_{irr} est le nombre de points irréguliers).

Dans ces conditions, on obtient un système de $3 N_p$ équations vectorielles à N_{irr} inconnues, soit :

$$M (U^*) = N (U^n), \quad (16)$$

où (U^*) et (U^n) sont les ensembles de valeurs modifiées et numériques aux points irréguliers. Les matrices M et N sont rectangulaires $9 N_p \times 3 N_{irr}$. Le système (16) est résolu au sens des moindres carrés :

$$(U^*) = ({}^t M M)^{-1} ({}^t M N) (U^n) = (R) (U^n). \quad (17)$$

La résolution de (17) ne nécessite pas le stockage de M . Les interfaces étant fixes, le calcul de R doit seulement être fait une fois, en pré-traitement ; la position des points irréguliers est alors aussi stockée en mémoire. Il suffit, à chaque pas de temps, d'effectuer la multiplication (17) et d'utiliser les valeurs modifiées adéquates aux points irréguliers.

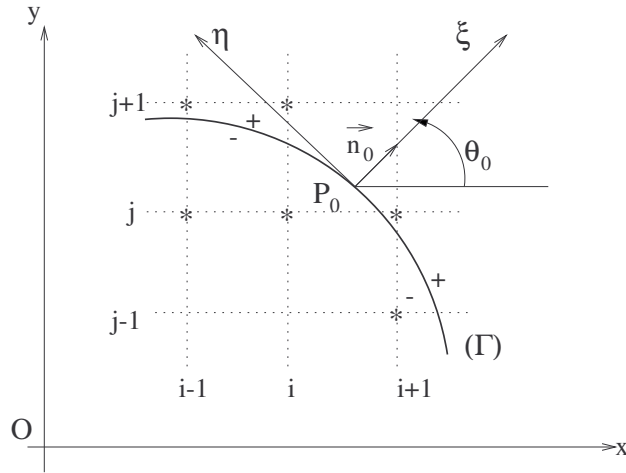


FIG. 1 – Repère local tangent en un point P_0 . Points irréguliers désignés par des étoiles *

Références

- [1] B. Lombard and J. Piraux. Modélisation numérique d'interfaces imparfaites et propagation des ondes élastiques 1d. *5 ème Congrès Français d'Acoustique*, 2000.
- [2] J. Piraux and B. Lombard. A new interface me-

5 Application

Nous illustrons cette étude par l'exemple d'une inclusion d'air ($\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$, $c = 340 \text{ m/s}$) dans de l'eau ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c = 1500 \text{ m/s}$). Sans traitement d'interface, ou avec l'IIM, le schéma numérique est instable. A notre connaissance, l'ESIM est la première méthode permettant de tenir de pareils contrastes. Lors de l'exposé oral, nous présenterons des films de simulations numériques du champ diffracté par l'inclusion.

6 Conclusion

Nous avons étendu en dimension 2 une nouvelle méthode d'interface, l'ESIM, et appliqué cette méthode aux équations de l'acoustique. L'ESIM permet d'améliorer les solutions numériques calculées au voisinage des interfaces et de renforcer la stabilité des schémas numériques en cas de forts contrastes.

Au cours de ce papier, nous avons utilisé les conditions de continuité naturelles entre deux fluides parfaits. Il est toutefois très intéressant de considérer des conditions de continuité différentes des conditions naturelles. Ce cas est examiné lors d'un autre exposé [1] : en dimension 1, des conditions de contact imparfait entre deux solides sont incorporées à un schéma numérique.

thod for hyperbolic problems with discontinuous coefficients. one-dimensional acoustic example. *Submitted to J. Comput. Phys.*

- [3] C. Zhang and R.J. LeVeque. The immersed interface method for acoustic wave equations with discontinuous coefficients. *Wave Motion*, (25):237–263, 1997.