

# Calcul des ondes acoustiques transitoires émises par une source ponctuelle dans un fluide continûment variable par la méthode de Cagniard–de Hoop

Nicolas Malleron, Bruno Lombard<sup>1</sup>, Joël Piraux

*Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique*  
31 chemin Joseph Aiguier, 13401 Marseille, France  
<http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/>

**Résumé.** *Nous appliquons la méthode de Cagniard-de Hoop au calcul des ondes acoustiques transitoires émises par une source ponctuelle dans un milieu aux propriétés physiques continûment variables selon une direction d'espace. Les équations du problème sont résolues de manière approchée dans le domaine de Fourier-Laplace par développement en série de Neumann, qui converge pour tout type de milieu. Le retour dans le domaine spatio-temporel est effectué sans avoir recours à une transformée de Laplace inverse : grâce à un changement de variable complexe, la solution dans l'espace de Laplace apparaît directement sous la forme d'une transformée de Laplace. On montre l'utilité de la méthode par comparaison des résultats avec ceux obtenus grâce à une méthode purement numérique, dans différentes configurations. Ce travail constitue une étape préliminaire pour le calcul de la réponse transitoire d'une plaque élastique de propriétés variables, en vue de sa caractérisation.*

**Mots-clés :** ondes transitoires, gradient de propriétés, calcul scientifique.

## 1 Introduction

En acoustique, on considère souvent que les propriétés physiques des milieux de propagation sont constantes en temps et en espace, et éventuellement discontinues au travers d'interfaces. Cette description est parfois trop idéalisée : dans certains cas, la variation des paramètres physiques selon une ou plusieurs directions d'espace influence la propagation des ondes. C'est par exemple le cas en acoustique sous-marine, où la célérité des ondes acoustiques varie surtout avec la profondeur [6]. En figure 1-a, on représente un exemple classique de profil de bathycélérimétrie. La célérité des ondes est maximale au voisinage de la surface et du fond, à cause des effets respectifs de la température et du poids de la couche d'eau. La figure 1-b représente un exemple moins classique de profil, dit profil "double-bosse". Un tel profil est observé par exemple au niveau du détroit de Gibraltar, à cause du mélange des eaux froides de l'Atlantique et des eaux chaudes de la Méditerranée. D'autres disciplines sont aussi concernées par la propagation des ondes mécaniques à travers des milieux à gradient unidirectionnel de propriété, par exemple la géophysique [1] ou le contrôle non-destructif des matériaux [3].

---

1. correspondant : [lombard@lma.cnrs-mrs.fr](mailto:lombard@lma.cnrs-mrs.fr)

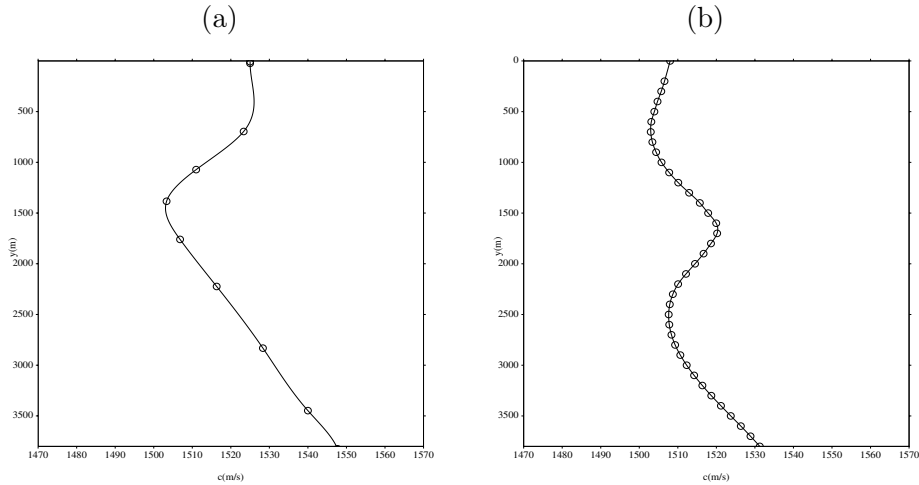


FIG. 1 – Profils bathycélérimétriques : classique (a), "double-bosse" (b).

Plusieurs techniques existent pour simuler la propagation des ondes en milieu continûment variable. Les plus anciennes sont les méthodes de *rayons*, découlant d'approximations haute-fréquence de l'équation d'Helmholtz [6]. Une de leurs limitations est de ne pas permettre le calcul en régime transitoire. Les méthodes d'*équation parabolique*, essentiellement développées en régime harmonique, sont des approximations paraxiales des équations d'ondes [6] : la qualité de ces méthodes décroît lorsque l'on s'éloigne des directions privilégiées de propagation. Enfin, les méthodes de simulation directe dans le domaine temporel, par des schémas de *différences finies* ou *éléments finis*, sont trop coûteuses d'un point de vue informatique si la distance de propagation considérée est importante.

Notre but est ici d'obtenir des réponses temporelles pour une position quelconque des couples source-récepteur. Les méthodes mentionnées précédemment ne conviennent donc pas. La stratégie choisie ici consiste alors à adapter une méthode analytique classiquement utilisée pour calculer la réponse acoustique temporelle à une excitation ponctuelle : la méthode de *Cagniard-de Hoop*. Cette méthode a été proposée par Cagniard en 1930, puis améliorée par de Hoop en 1960 [5]. Une tendance actuelle en acoustique étant l'analyse des signaux transitoires, la méthode de Cagniard-de Hoop connaît un regain d'intérêt. Ainsi, plusieurs auteurs l'ont récemment adaptée [3, 9], voire utilisée comme outil d'analyse numérique [2].

La méthode de Cagniard-de Hoop a principalement été appliquée à des milieux aux propriétés physiques constantes par morceaux. La résolution des équations obtenues après passage dans le domaine de Fourier-Laplace est alors explicite. A notre connaissance, les seuls auteurs ayant étudié le cas de milieux à gradient unidirectionnel de propriétés sont Verweij et de Hoop [4, 10], dont nous nous inspirons très largement. La principale originalité de la présente étude réside dans la mise en oeuvre numérique des algorithmes, et particulièrement dans la comparaison avec une autre méthode de calcul. Pour simplifier, on considère ici le cas d'un milieu fluide infini, en dimension 2 et sans interfaces. Beaucoup de détails techniques sont omis : nous renvoyons pour cela le lecteur intéressé vers [7].

## 2 Etude théorique

### 2.1 Modélisation du problème

Les inconnues du problème sont  $u$ ,  $v$  les composantes horizontale et verticale de la vitesse acoustique, et  $p$  la pression acoustique. Les paramètres physiques sont la masse volumique  $\rho$  et la célérité des ondes acoustiques  $c$ , qui dépendent de la profondeur  $y$  et sont supposées suffisamment régulières, i.e. de classe  $C^1$ . On considère une source de masse (monopôle acoustique), modélisant par exemple une explosion sous-marine ou un émetteur. Les longueurs d'ondes émises étant supposées très grandes devant les dimensions caractéristiques de la source, on assimile celle-ci à un point, situé en  $(x_s = 0, y_s)$ . La fonction temporelle décrivant le débit massique est notée  $q(t)$ , avec  $q$  causale et satisfaisant  $q(0) = 0$ . La linéarisation des équations de conservation dans un fluide parfait au repos avec terme source de masse conduit au système d'EDP

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \delta(x) \delta(y - y_s) q(t), \end{cases}$$

auquel on adjoint les conditions initiales  $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$ , et  $p(x, y, 0) = 0$ .

### 2.2 Résolution du problème

**1<sup>ère</sup> étape : transformations intégrales.** On applique une transformée de Fourier en  $x$  (variable duale  $k$ ) et une transformée de Laplace en  $t$  (variable duale  $s$ ) à (1) [8, 11], d'où l'EDO

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial y} + s \mathbf{A} \hat{\mathbf{b}} = \delta(y - y_s) \tilde{\mathbf{d}},$$

avec

$$\mathbf{A}(y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k^2}{\rho(y) s^2} + \frac{1}{\rho(y) c(y)^2} \\ \rho(y) & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}(y) = \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{p} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{d}}(y_s) = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{q}(s)}{\rho(y_s) c(y_s)^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On diagonalise  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$  et on introduit le nouveau vecteur inconnu  $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{P}^{-1} \hat{\mathbf{b}}$ , d'où

$$(2) \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial y} + s \mathbf{D} \hat{\mathbf{w}} = \delta(y - y_s) \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{\Lambda} \hat{\mathbf{w}},$$

avec

$$(3) \quad \mathbf{D}(y) = \begin{pmatrix} \gamma(y) & 0 \\ 0 & -\gamma(y) \end{pmatrix}, \quad \gamma(y) = \left( \frac{k^2}{s^2} + \frac{1}{c^2(y)} \right)^{1/2}, \\ \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & \chi(y) \\ \chi(y) & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi(y) = -\frac{1}{2c^3\gamma^2} \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y},$$

où  $\chi$  est la fonction de réflexivité du milieu. En milieu homogène,  $\chi = 0$ . En milieu hétérogène,  $\chi \neq 0$  et la matrice  $\mathbf{\Lambda}$  non diagonale dans (2) couple les composantes de  $\hat{\mathbf{w}}$ .

**2<sup>ème</sup> étape : solution en Fourier-Laplace.** On écrit la solution de (2)

$$(4) \quad \hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{w}}_h + \mathbf{L}\hat{\mathbf{w}},$$

où  $\hat{\mathbf{w}}_h$  satisfait le système diagonal à coefficients variables et terme source singulier

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{w}}_h}{\partial y} + s \mathbf{D} \hat{\mathbf{w}}_h = \delta(y - y_s) \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{d}}.$$

En posant  $Y = \gamma/\rho$ , la solution de ce système est

$$(5) \quad \hat{\mathbf{w}}_h = \begin{cases} \hat{w}_{1h}(y) = \frac{\sqrt{2}}{2\rho(y_s)c(y_s)^2} Y^{-1/2}(y_s) H(y - y_s) \tilde{q} \exp\left(-s \int_{y_s}^y \gamma(\nu) d\nu\right), \\ \hat{w}_{2h}(y) = \frac{\sqrt{2}}{2\rho(y_s)c(y_s)^2} Y^{-1/2}(y_s) H(y_s - y) \tilde{q} \exp\left(-s \int_y^{y_s} \gamma(\nu) d\nu\right). \end{cases}$$

La correction  $\mathbf{L}\hat{\mathbf{w}}$  satisfait le système différentiel à coefficients variables

$$\frac{\partial \mathbf{L}\hat{\mathbf{w}}}{\partial y} + s \mathbf{D} \mathbf{L}\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{\Lambda} \hat{\mathbf{w}},$$

dont la solution est

$$(6) \quad \mathbf{L}\hat{\mathbf{w}} = \begin{cases} L \hat{w}_1(y) = \int_{-\infty}^y \chi(\xi) \hat{w}_2(\xi) \exp\left(-s \int_{\xi}^y \gamma(\nu) d\nu\right) d\xi, \\ L \hat{w}_2(y) = - \int_y^{\infty} \chi(\xi) \hat{w}_1(\xi) \exp\left(-s \int_y^{\xi} \gamma(\nu) d\nu\right) d\xi. \end{cases}$$

La solution totale (4) est alors obtenue par développement en série de Neumann [8]

$$(7) \quad \begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{L}) \hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{w}}_h &\Rightarrow \hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \hat{\mathbf{w}}_h, \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{L}^2 + \dots + \mathbf{L}^N + \dots) \hat{\mathbf{w}}_h, \\ &= \hat{\mathbf{w}}^{(0)} + \hat{\mathbf{w}}^{(1)} + \dots + \hat{\mathbf{w}}^{(N)} + \dots \end{aligned}$$

On appelle *onde d'ordre N* la somme des termes dans (7) jusqu'à l'ordre  $N$  inclus. Pour  $s$  suffisamment grand, la série (7) converge [7, 10]. Le théorème de Lerch [11] assure alors que la transformée de Laplace inverse de  $\hat{\mathbf{w}}$  est unique et causale.

**3<sup>ème</sup> étape : retour en  $(x, t)$ .** Cette étape est uniquement présentée pour l'onde d'ordre 0 :  $\hat{\mathbf{b}}^{(0)} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{w}}^{(0)} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{w}}_h$ . Une transformée de Fourier inverse en  $x$  et le changement de variable  $k = ip$  conduisent à

$$(8) \quad \tilde{\mathbf{b}}^{(0)}(x, s) = s \tilde{q}(s) \tilde{\mathbf{G}}^{(0)}(x, y, s) \Leftrightarrow \mathbf{b}^{(0)}(x, t) = q'(t) * \mathbf{G}^{(0)}(x, y, t),$$

où  $\tilde{\mathbf{G}}^{(0)}$  est la transformée de Laplace de la fonction de Green d'ordre 0

$$(9) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}^{(0)}(x, y, s) &= \frac{i}{4\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\bar{\Pi}(p)}{\rho(y_s)c(y_s)^2} \exp\left\{-s\left(-px + \int_y^{y_s} \bar{\gamma}(\nu) d\nu\right)\right\} dp, \\ &= \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Theta(p) dp. \end{aligned}$$

Le vecteur  $\overline{\Pi}$  est explicité dans [7]. La coupure associée à  $\overline{\Pi}$  dans (9) est le segment réel  $[1/c_{max}, +\infty[$ , où  $c_{max} = \max(c)$ . On définit alors le *chemin de Cagniard-de Hoop* [2]

$$(10) \quad \Gamma^{(0)} = \left\{ p \in \mathbb{C} / \mathcal{F}^{(0)}(p, t) = -px + \int_y^{y_s} \left( \frac{1}{c^2(\nu)} - p^2 \right)^{1/2} d\nu - t = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Il existe un unique  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\mathcal{F}^{(0)}(p_0, t_0) = \frac{\partial \mathcal{F}^{(0)}}{\partial p}(p_0, t_0) = 0$  :  $t_0$  est le temps d'arrivée de l'onde directe entre la source et le récepteur. Le point  $p_0 = p(t_0)$  est réel. Les solutions de (10) sont déterminées numériquement [7]. Deux types de géométrie de  $\Gamma^{(0)}$  au voisinage de  $p_0$  existent (figure 2) :

- si  $\frac{\partial \mathcal{F}^{(0)}}{\partial p}(1/c_{max}, t_0) > 0$ , le contour  $\Gamma^{(0)}$  coupe l'axe réel avec une tangente verticale en  $p_0 < 1/c_{max}$  :  $\Gamma^{(0)}$  ne traverse donc pas la coupure.
- si  $\frac{\partial \mathcal{F}^{(0)}}{\partial p}(1/c_{max}, t_0) < 0$ , le contour  $\Gamma^{(0)}$  coupe l'axe réel avec une tangente horizontale au point de branchement  $p_0 = 1/c_{max}$ . Ce cas n'existe pas dans le cas d'un milieu homogène. On contourne alors le point de branchement  $1/c_{max}$  grâce à un arc de cercle  $A_\varepsilon$ .

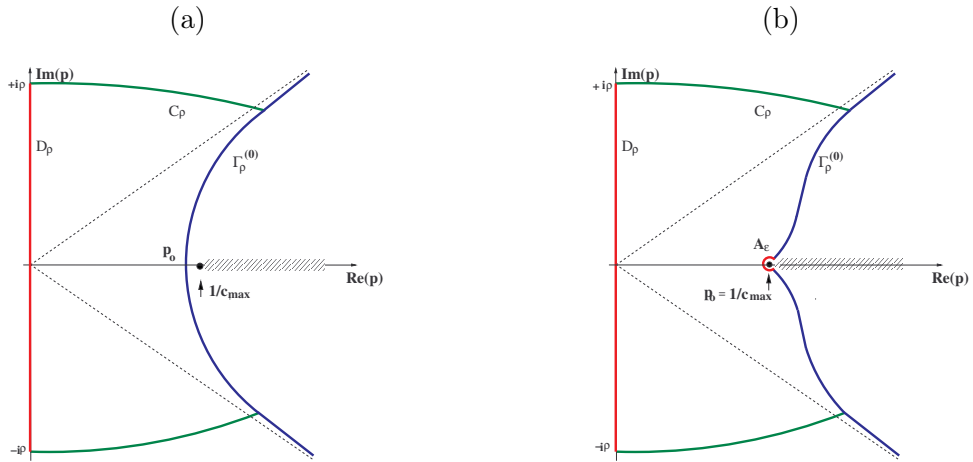


FIG. 2 – Contours de Cagniard-de Hoop à l'ordre 0, pour  $\frac{\partial \mathcal{F}^{(0)}}{\partial p}(1/c_{max}, t_0) > 0$  (a) et  $\frac{\partial \mathcal{F}^{(0)}}{\partial p}(1/c_{max}, t_0) < 0$  (b).

On note  $\Gamma_\rho^{(0)}$  la restriction de  $\Gamma^{(0)}$  aux points de module inférieur à  $\rho$ . On adjoint à  $\Gamma_\rho^{(0)}$  (et le cas échéant à  $A_\varepsilon$ ) le segment imaginaire  $D_\rho$  et les arcs de cercle  $C_\rho$  (figure 2). Sur ce contour fermé,  $\Theta$  est holomorphe (9). On applique alors le théorème des résidus et le lemme de Jordan. Après quelques calculs, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{(0)}(x, y, s) &= - \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Gamma_\rho^{(0)}} \Theta(p) dp + \underbrace{\int_{C_\rho} \Theta(p) dp}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_{A_\varepsilon} \Theta(p) dp}_{\rightarrow 0} \right), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{+\infty} \Im m \left( \frac{\overline{\Pi}(p(t))}{\rho(y_s)c(y_s)^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \exp(-st) dt. \end{aligned}$$

Par unicité de la transformée de Laplace inverse, la fonction de Green d'ordre 0 s'écrit

$$(11) \quad \mathbf{G}^{(0)}(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Im m \left( \frac{\overline{\Pi}(p(t))}{\rho(y_s) c(y_s)^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) H(t - t_0).$$

### 2.3 Remarques

Si  $t \neq t_0$ , le théorème des fonctions implicites permet de calculer facilement  $\frac{\partial p}{\partial t}$  dans (11). Si  $t = t_0$ , une analyse plus fine est nécessaire [7]). Deux cas se présentent :

- si  $\frac{\partial \mathcal{F}^{(0)}}{\partial p}(1/c_{max}, t_0) > 0$ , alors  $\frac{\partial p}{\partial t} \sim \frac{i}{\sqrt{2|g''(p_0)|}} \frac{1}{\sqrt{t-t_0}}$ , avec  $g''(p_0) \neq 0$  et borné.

On retrouve la singularité classique en 2D [8], d'où le fait que  $\Gamma^{(0)}$  coupe l'axe réel perpendiculairement (figure 2-a). Un soin particulier doit alors être apporté lors de la mise en oeuvre numérique des convolutions découlant de (8) et (11).

- si  $\frac{\partial \mathcal{F}^{(0)}}{\partial p}(1/c_{max}, t_0) < 0$ , alors  $\frac{\partial p}{\partial t} \sim 0$ . Ce cas ne conduit à aucune difficulté. On retrouve le fait que  $\Gamma^{(0)}$  est tangent à l'axe horizontal (figure 2-b).

Une deuxième remarque concerne le calcul des ondes d'ordre  $N \geq 1$  (7). La démarche est la même qu'à l'ordre 0. La principale difficulté est liée au fait que la fonction de Green d'ordre  $N$  est une intégrale  $N$ -uple, ce qui complique notablement la mise en oeuvre numérique, et augmente considérablement les temps de calcul. Signalons un autre point technique : il est nécessaire de prendre en compte le résidu lié au pôle de la fonction de réflexivité dans (3) et (6). En pratique, seuls les cas  $N = 0$  et  $N = 1$  ont été implémentés dans [7].

## 3 Résultats numériques

### 3.1 Cadre de travail

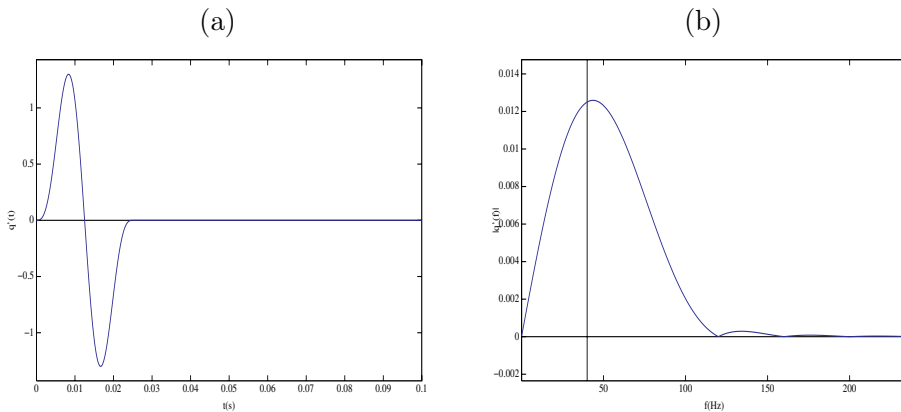


FIG. 3 – Source : réponse temporelle  $q'(t)$  (a); contenu spectral  $|q'(\omega)|$  (b).

Pour qualifier la précision des résultats, on compare les solutions calculées par la méthode de Cagniard-de Hoop avec les solutions obtenues par une méthode de simulation numérique directe. Pour cela, on utilise le schéma de Lax-Wendroff. Le nombre de points de calcul par longueur d'onde est tel que la solution numérique peut être considérée comme solution de référence (voir expérience 1).

Dans les exemples qui suivent, la masse volumique est constante. Les profils de célérité sont déterminés à partir de valeurs ponctuelles interpolées par des splines cubiques, assurant une régularité plus que suffisante à  $\chi$  (3). La dérivée temporelle  $q'(t)$  du débit massique est une sinusoïde tronquée de classe  $C^2$  et de fréquence centrale 40 Hz [6]. La réponse temporelle correspondante et son contenu spectral sont représentés en figure 3.

En figures 4-7, on présente la pression acoustique, à un instant donné. Sur les cartes, les valeurs positive et négative de la pression acoustique sont codées avec une palette vert-rouge. Les traits verticaux désignent le lieu des points où sont réalisées les coupes. Sur ces dernières et à l'exception de la figure 7, la solution analytique et la solution numérique sont respectivement représentées par des pointillés et des traits pleins.

### 3.2 Expériences numériques

**Expérience 1/4.** La première expérience est réalisée en milieu homogène (figure 4). Elle a pour but de tester la précision de la prise en compte de la source par le schéma numérique : la solution obtenue par la méthode de Cagniard-de Hoop étant très simple à mettre en oeuvre dans ce cas et arbitrairement précise, elle sert de solution de référence. Pour une source ponctuelle, la solution est infinie à la source tant que celle-ci est allumée. La solution estimée numériquement par le schéma de Lax-Wendroff présente alors des oscillations parasites au voisinage de la source. Loin de cette dernière, l'amplitude des ondes est très exactement reproduite (figure 4-b). Pour faire disparaître les oscillations, on peut étaler la source sur plusieurs points de calcul du schéma, avec une pondération gaussienne. Cependant, la solution numérique diffère alors quelque peu de la solution exacte de (1) (figure 4-c). Par la suite, nous utilisons toujours une source ponctuelle pour exciter le schéma numérique, en réalisant les coupes suffisamment loin de la source.

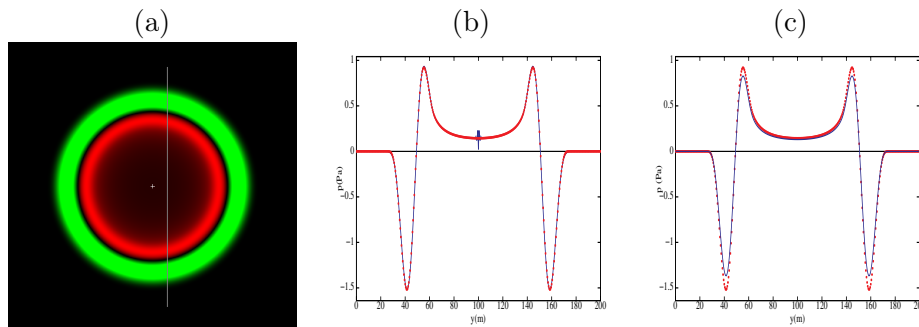


FIG. 4 – *Expérience 1/4 : milieu homogène. (a) : carte de pression. (b) : source ponctuelle. (c) : source étalée.*

**Expérience 2/4.** La deuxième expérience est réalisée dans un milieu avec un profil de célérité variant linéairement de 3000 m/s en haut du domaine à 1000 m/s en bas du domaine (figure 5). La solution de Cagniard-de Hoop est calculée à l'ordre 0, pour un temps de calcul d'environ 1 seconde par point sur un PC à 2 GHz. L'accord entre solutions numérique et analytique est excellent, tant sur les temps d'arrivée que sur les amplitudes.

**Expérience 3/4.** L'expérience 3 est réalisée dans un milieu avec un profil de bathy-célérimétrie classique, avec un seul minimum, tel que représenté en figure 1-a. Là encore, la solution calculée par Cagniard-de Hoop à l'ordre 0 est très précise (figure 6).

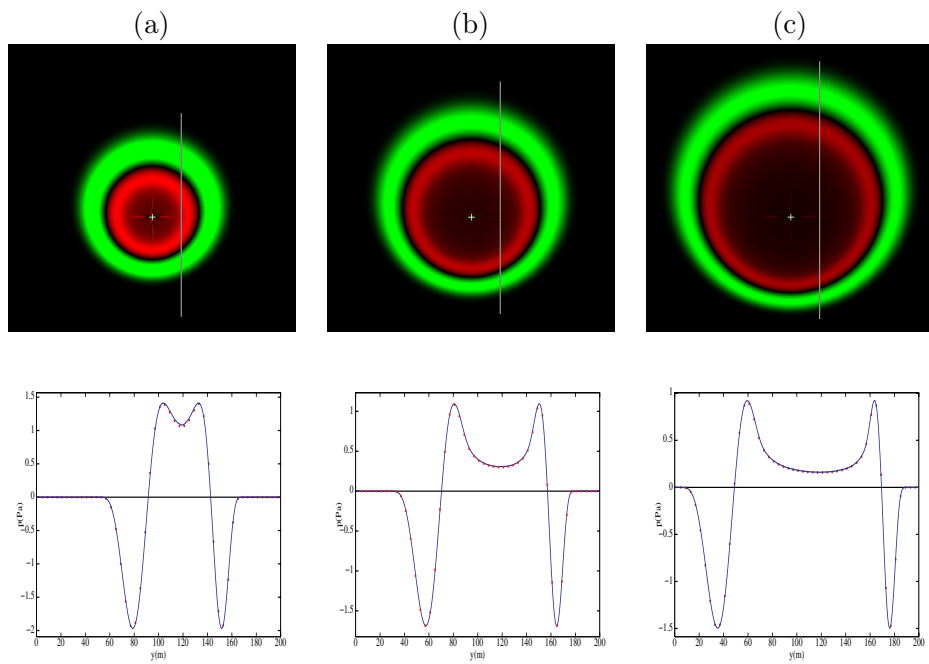


FIG. 5 – *Expérience 2/4 : profil linéaire. Lax-Wendroff (trait plein), ordre 0 (pointillés).*

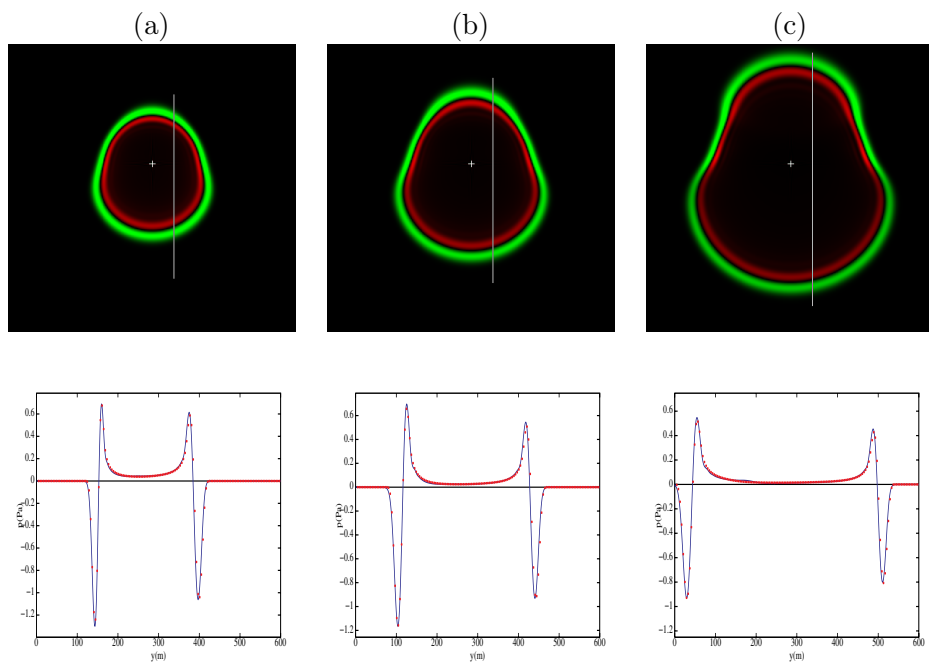


FIG. 6 – *Expérience 3/4 : profil classique. Lax-Wendroff (trait plein), ordre 0 (pointillés).*

**Expérience 4/4.** On considère enfin le cas d'un profil "double-bosse", tel que représenté en figure 1-b. En figure 7-b, on observe une légère différence entre la solution numérique de référence et la solution calculée par Cagniard-de Hoop à l'ordre 0. Cette différence est due au fait que l'ordre 0 ne prend pas en compte les arrivées multiples dues au guidage des ondes dans le chenal acoustique. En figure 7-c, on réalise le calcul de Cagniard-de Hoop en prenant en compte les termes d'ordre 1. L'accord entre la solution numérique de référence (trait plein bleu) et la solution numérique (pointillés) est alors excellent. Par contre, le surcoût informatique est considérable : chaque point nécessite environ 20 minutes de calcul sur un PC à 2 GHz.

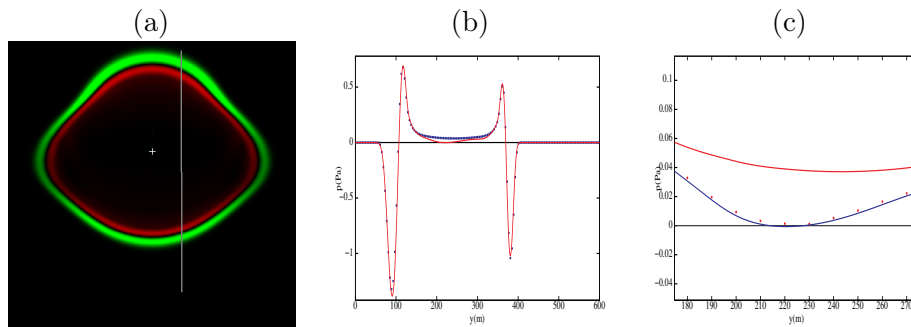


FIG. 7 – *Expérience 4/4 : profil "double-bosse". (b) : Lax-Wendroff (trait plein), ordre 0 (pointillés). (c) : Lax-Wendroff (trait plein bleu), ordre 0 (trait plein rouge), ordre 1 (pointillés).*

## 4 Conclusion et perspectives

Dans cette étude, on applique la méthode de Cagniard-de Hoop à un fluide parfait présentant un gradient unidirectionnel de propriétés physiques, afin de calculer la réponse acoustique transitoire à une excitation ponctuelle. Si les paramètres physiques sont suffisamment réguliers, la méthode converge toujours, contrairement aux méthodes WKBJ [10]. Par rapport à des méthodes numériques directes, l'avantage de la méthode de Cagniard-de Hoop est qu'elle dispense d'avoir à calculer la solution sur un large domaine : le physicien est généralement intéressé par la réponse acoustique en un petit nombre de récepteurs.

Plusieurs directions de travail restent à défricher. Tout d'abord, il serait intéressant de comparer l'approche suivie ici à une méthode de rayons, afin de quantifier l'importance des trajets multiples. On pourrait ainsi estimer le nombre de termes à prendre en compte dans (7). L'implémentation informatique efficace des algorithmes à des ordres  $N \geq 2$  doit encore être réalisée. Enfin, la généralisation de la méthode au cas d'un solide continûment variable infini ne devrait pas poser de problème particulier. Un travail plus aventureux concerne l'étude de l'interface entre un demi-plan solide continûment variable et le vide, généralisant le problème de Lamb [1]. Une telle étude possède des applications intéressantes en vue de la caractérisation des matériaux industriels.

**Remerciements.** Nous remercions les membres suivants du GdR 2501 pour les discussions sur la méthode de Cagniard-de Hoop : Julien Diaz, Quentin Grimal, Olivier Poncet.

## Références

- [1] K. AKI, P. G. RICHARDS, *Quantitative Seismology. Theory and Methods. Vol. 1*, Freeman, New-York, 1980.
- [2] J. DIAZ, P. JOLY, *An analysis of higher order boundary conditions for the wave equation*, SIAM J. App. Math. 65-5 (2005), pp. 1547–1575.
- [3] Q. GRIMAL, *Etude dans le domaine temporel de la propagation d’ondes élastiques en milieux stratifiés*, Thèse de l’Université de Paris XII, France, 2003.
- [4] A. T. DE HOOP, *Acoustic radiation from an impulsive point source in a continuously layered fluid. An analysis based on the Cagniard method*, J. Acoust. Soc. Am. 88-5 (1990), pp. 2376-2388.
- [5] A. T. DE HOOP, *A modification of Cagniard’s method for solving seismic pulse problems*, Applied Scientific Research 8 (1960), pp. 349–356.
- [6] F. B. JENSEN, W. A. KUPERMAN, M. B. PORTER, H. SCHMIDT, *Computational Ocean Acoustics*, Springer-Verlag (1994).
- [7] N. MALLERON, *Calcul par la méthode de Cagniard-de Hoop des ondes acoustiques transitoires émises par une source ponctuelle dans un fluide continûment variable*, Master de Mécanique, Physique et Modélisation (Marseille), 2005.<sup>2</sup>
- [8] P. M. MORSE, H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Book Company (1953).
- [9] O. PONCELET, *Réponse transitoire à une source impulsionnelle en milieu anisotrope. Calcul des fonctions de Green par la méthode de Cagniard–de Hoop*, cours de l’Ecole des Ondes CEA–EDF–INRIA (2001).
- [10] M. T. VERWEIJ, A. T. DE HOOP, *Determination of seismic wavefields in arbitrarily continuously layered media using the modified Cagniard method*, Geophys. J. Int. 103 (1990), pp. 731-754.
- [11] D. V. WIDDER, *The Laplace Transform*, Princeton UP, 1946.

---

2. disponible sur <http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Articles/Panawa.pdf>