

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Estimation de multiplicateur de Gabor par algorithmes d'optimisation

Anaïk Olivero^{1,2}, Bruno Torrèsani², Richard Kronland-Martinet¹

¹ Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique 31 Chemin Joseph Aiguier, 13331 Marseille, olivero@lma.cnrs-mrs.f

² Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités CMI, 39 rue Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13

Une nouvelle approche pour l'analyse et la catégorisation d'une famille de sons exploitant des transformations reliant ces sons deux à deux a été récemment proposée [1]. Dans cette approche, ces transformations sont modélisées comme multiplicateurs de Gabor. Un multiplicateur s'écrit de la façon suivante : $M_{\mathbf{m}}x = \mathcal{V}_g^* \mathbf{m} \mathcal{V}_g x$, où \mathcal{V}_g désigne l'opérateur d'analyse (transformation de Gabor) et \mathcal{V}_g^* désigne l'opérateur de synthèse (transformation de Gabor inverse). Le masque de Gabor \mathbf{m} , agit par multiplication point par point avec la transformée de Gabor $\mathcal{V}_g x$. Nous nous intéressons ici au problème de l'estimation du masque de Gabor \mathbf{m} . Pour un couple de signaux donné (x_0, x_1) , le problème peut s'écrire comme la minimisation d'une formulation variationnelle, que nous proposons ici de reformuler de la façon suivante : $\|A\mathbf{m} - x_1\| + \lambda d(\mathbf{m})$ où A est un opérateur linéaire. Avec cette formulation, il devient possible d'obtenir une solution au moyen d'algorithmes itératifs pour des choix d'a priori tels que des normes l_p , en considérant $d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m}\|_p^p$. Nous étudierons le rôle du choix de la fonction de régularisation et l'allure des solutions obtenues pour le masque, dans un contexte d'étude des signaux musicaux issus d'instruments de musique.

1 Introduction

Une nouvelle approche pour l'analyse et la catégorisation d'une famille de sons exploitant des transformations reliant ces sons deux à deux a été récemment proposée [1, 2]. Dans cette approche, les signaux sont supposés être suffisamment similaires pour que ces transformations puissent être modélisées par des *multiplicateurs de Gabor*, transformations linéaires diagonales dans une représentation de Gabor (Transformée de Fourier à Court Terme sous-échantillonnée). Les multiplicateurs de Gabor sont caractérisés par une *fonction de transfert temps-fréquence* (à valeurs complexes), appelée ici *masques de Gabor*.

Un masque de Gabor peut être obtenu par une simple division point par point des représentations de Gabor des signaux d'entrée et de sortie. Cependant, cette opération est généralement une opération mal posée, qui est propice à l'introduction de distorsions. Nous proposons ici de reformuler le problème d'estimation de masque de Gabor comme un problème inverse linéaire, dont la solution peut être obtenue pour des choix appropriés de régularisation. Les problèmes d'optimisation correspondant sont solutionnés par des algorithmes itératifs rétrécissants/seuillants (en anglais "iterative shrinkage/thresholding algorithm") de type Landweber (voir [6]). Nous considérons différents choix de régularisations et décrivons les algorithmes correspondants.

Nous décrivons brièvement dans la deuxième partie le contexte mathématique de la théorie de Gabor permettant de la définition d'un multiplicateur de Gabor. La troisième partie est consacrée à la résolution du problème de l'estimation, puis les applications feront

l'objet de la quatrième partie.

2 Transformée de Gabor et Multiplicateurs

Les multiplicateurs de Gabor sont définis dans le contexte de la théorie de Gabor (voir [3, 4] et leurs références), qui peut être vue comme une version sous-échantillonnée de la Transformée de Fourier à Court Terme. Pour simplifier notre propos, nous nous limiterons au cas des signaux de dimension finie, i.e. des vecteurs de \mathbb{C}^L (avec des conditions aux bords périodiques, i.e. les restrictions à $\{0, \dots, L-1\}$ de séquences infinies L -périodiques. La norme euclidienne est ci-après notée $\|\cdot\|$. Une théorie similaire peut être développée dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ et $L^2(\mathbb{R})$.

2.1 Repères de Gabor

Un repère de Gabor est une famille surcomplète d'atomes temps-fréquence générés par translations et modulations sur un réseau discret d'une fenêtre de référence, notée $g \in \mathbb{C}^L$. Les atomes sont de la forme

$$g_{mn}[l] = e^{2i\pi n\nu_0(l-mb_0)} g[l-mb_0],$$

où b_0 et ν_0 sont deux nombres fixant le réseau temps-fréquence utilisé et divisibles par L . Nous notons $M = L/b_0$ et $N = L/\nu_0$. La transformation de Gabor associée à tout signal $x \in \mathbb{C}^L$ sa transformée $\mathcal{V}_g x$, définie par

$$\mathcal{V}_g x[m, n] = \langle x, g_{mn} \rangle = \sum_{l=0}^{l=L-1} x[l] e^{-2i\pi n\nu_0(l-mb_0)} \bar{g}[l-mb_0].$$

Sous des hypothèses assez peu contraignantes sur la fenêtre g et si le produit $b_0\nu_0$ est assez petit, la transformation est inversible. Il est même possible de trouver des fenêtres g telles que l'on ait, $\forall x \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\forall x \in \mathbb{C}^L, x = \sum_{m,n} \mathcal{V}_g x[m,n] g_{mn}$$

Le repère de Gabor est alors dit ajusté. C'est dans ce cadre que nous nous placerons ici. L'extension à des situations plus générales peut facilement être faite.

2.2 Multiplicateurs de Gabor

Soit $\mathbf{m} = \{\mathbf{m}[m,n], m = 1, \dots, M \text{ et } n = 1, \dots, N\}$ une suite bornée, le multiplicateur de Gabor associé à \mathbf{m} est alors défini par $\mathbb{M}_{\mathbf{m}}$:

$$\mathbb{M}_{\mathbf{m}}x = \sum_{m,n} \mathbf{m}[m,n] \mathcal{V}_g x[m,n] g_{mn}. \quad (1)$$

\mathbf{m} est appelé le *masque de Gabor* et peut être vu comme une *fonction de transfert temps-fréquence* ($\mathbb{M}_{\mathbf{m}}$ est vu comme un filtre variant dans le temps). $\mathbb{M}_{\mathbf{m}}$ est un opérateur linéaire et est diagonal dans la représentation de Gabor $(g_{m,n})_{mn}$. Les propriétés d'approximation d'opérateurs linéaires par multiplicateurs de Gabor ont été étudiées dans [5].

Un multiplicateur agit par multiplication point par point avec la transformée de Gabor $\mathcal{V}_g x$ de x via l'opérateur $\Upsilon_{\mathbf{m}}$. On peut écrire un multiplicateur de la façon suivante :

$$\mathbb{M}_{\mathbf{m}}x = \mathcal{V}_g^* \Upsilon_{\mathbf{m}} \mathcal{V}_g x$$

3 Estimation de multiplicateurs de Gabor

3.1 Le problème d'estimation

Nous nous intéressons ici au problème d'approximation d'un système par multiplicateur de Gabor, et de l'estimation de sa fonction de transfert \mathbf{m} à partir d'un jeu de signaux d'entrée et de sortie. Pour simplifier, plaçons-nous dans la situation d'un signal d'entrée x_0 et d'un signal de sortie x_1 , supposés être liés par une relation de la forme $x_1 = \mathbb{M}_{\mathbf{m}}x_0 + \epsilon_1$, où ϵ_1 représente un bruit additif, supposé blanc Gaussien. Une solution possible est évidemment $\mathbf{m} = \mathcal{V}_g x_1 / \mathcal{V}_g x_0$, mais une telle solution n'est pas bornée en général. Nous préférons nous tourner vers une solution au sens des moindres carrés. Plus précisément, on cherche à $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ qui minimise la relation

$$\Phi[\mathbf{m}] = \|x_1 - \mathbb{M}_{\mathbf{m}}x_0\|^2 + \lambda d(\mathbf{m}), \quad (2)$$

où $d(\mathbf{m})$ est un terme de régularisation, dont l'influence est contrôlée par le paramètre λ .

Pour $d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m} - 1\|^2$, l'optimisation de la fonction Φ par rapport à \mathbf{m} conduit au problème matriciel

$$G\mathbf{m} = U \quad (3)$$

où

$$\begin{cases} U &= \mathcal{V}_g x_1 \cdot \overline{\mathcal{V}_g x_0} + \lambda \\ G &= \mathcal{D}_g x_0 \mathcal{K}_g \overline{\mathcal{D}_g x_0} + \lambda Id \end{cases}$$

Ici $\mathcal{D}_g x_0$ est la matrice diagonale $\mathcal{D}_g x_0 = \text{diag}(\mathcal{V}_g x_0)$, et \mathcal{K}_g le noyau reproduisant ($\mathcal{K}_g(m,n,m_0,n_0) = \langle g_{m,n}, g_{m_0,n_0} \rangle$).

Les auteurs de [1, 2] ont travaillé avec une approximation du problème matriciel, ce qui revient à formuler l'optimisation directement dans le domaine de Gabor

$$\tilde{\Phi}[\mathbf{m}] = \|\mathcal{V}_g x_1 - \mathbf{m} \cdot \mathcal{V}_g x_0\|^2 + \lambda d(\mathbf{m}), \quad (4)$$

ou bien à réduire le système (3) à sa diagonale.

De telles approximations mènent à une solution explicite pour \mathbf{m} , qui n'est pas la solution du problème (2). Plus précisément, ces approches ne tiennent pas compte des relations intrinsèques de la transformée de Gabor d'un signal, qui sont représentées par les termes non-diagonaux du système (3) et causées par la forme du noyau reproduisant. Nous développons ici une formulation alternative sous la forme d'un problème inverse. L'équation (2) peut se réécrire

$$\Phi[\mathbf{m}] = \|A\mathbf{m} - x_1\|^2 + \lambda d(\mathbf{m}), \quad (5)$$

où

$$A = \mathcal{V}_g^* \circ \Upsilon_{\mathcal{V}_g x_0}, \quad (6)$$

$\Upsilon_{\mathcal{V}_g x_0}$ est l'opérateur de multiplication point par point avec $\mathcal{V}_g x_0$. Cet opérateur dépend du signal source. Dans la suite nous aurons besoin de l'opérateur adjoint qui s'écrit

$$A^* = \Upsilon_{\overline{\mathcal{V}_g x_0}} \circ \mathcal{V}_g. \quad (7)$$

Même dans les situations où il existe une expression explicite de la solution, par exemple pour $d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m}\|_2^2$, cette solution ne peut pas être obtenue en pratique, car elle demande un calcul matriciel de trop grande taille. Pour d'autres choix de $d(\mathbf{m})$, on ne pourra pas obtenir une solution explicite. Dans tous les cas, nous nous tournerons plutôt vers des algorithmes numériques.

3.2 Estimation du masque de Gabor par algorithmes itératifs

Les formulations (5) et (6), avec les choix de régularisation appropriés nous permettent d'utiliser des algorithmes itératifs tels que ceux décrits dans [6, 7] où le lecteur trouvera plus de détails et les résultats de convergence. Explicitement, notre problème est le suivant :

$$\min_{\mathbf{m}} \Phi(\mathbf{m}), \text{ avec } \Phi(\mathbf{m}) = \|A\mathbf{m} - x_1\|_2^2 + \lambda d(\mathbf{m}) \quad (8)$$

On sait que pour $d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m}\|_p^p$ avec $p \geq 1$, cette fonctionnelle est convexe et a donc un unique minimum. Cependant, ce dernier est généralement difficile à obtenir en grandes dimensions. La solution proposée dans [6], qui converge vers la solution sous des hypothèses peu contraignantes sur A , est basée sur l'introduction d'une fonctionnelle de substitution.

Supposons que $\|A^*A\|_{Op} \leq C$ pour une certaine constante C , le fonctionnelle de substitution

$$\Phi^{SUR}(\mathbf{m}; \alpha) = \Phi(\mathbf{m}) - \|A\mathbf{m} - A\alpha\|_2^2 + C\|\mathbf{m} - \alpha\|_2^2.$$

est toujours convexe et possède l'avantage d'admettre un minimum dont on peut obtenir une expression explicite pour les choix de régularisation donnés ci-dessous. L'idée est d'utiliser un algorithme itératif en commençant par

une valeur $\mathbf{m}_0 \in \mathbb{C}^{M \times N}$ quelconque et de mettre à jour α à chaque itération par

$$\mathbf{m}_k = \operatorname{argmin}\{\Phi^{SUR}(\mathbf{m}; \mathbf{m}_{k-1}), \mathbf{m} \in \mathbb{C}^{M \times N}\}$$

Cet algorithme tend alors vers la solution du problème initial (8). Par soucis de clarté, on pose

$$y_{k-1} = C\mathbf{m}_{k-1} - A^*(x_1 - A\mathbf{m}_{k-1}),$$

où A^* est l'adjoint de A donné par (7). Les algorithmes avec des termes de régularisation ℓ_2 (resp. ℓ_1) correspondent à une version amortie (resp. seuillée) de la méthode itérative de Landweber (correspondant au cas où $\lambda = 0$). Nous détaillons ici les algorithmes obtenus pour différents choix de régularisation. Les termes de régularisation ℓ_1 font appel à l'opérateur de seuillage défini pour $x \in \mathbb{C}^L$,

$$\mathcal{S}^\lambda(x) = e^{i \arg(x)} [|x| - \lambda]_+$$

- $d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m}\|_2^2$. Ce choix mène à un algorithme de rétrécissement itératif et s'exprime comme

$$\mathbf{m}_0 \in \mathbb{C}^L, \mathbf{m}_k = \frac{y_{k-1}}{C + \lambda}$$

- $d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m}\|_1$. Ce choix mène à un algorithme de seuillage itératif qui est une version qui s'exprime comme

$$\mathbf{m}_0 \in \mathbb{C}^L, \mathbf{m}_k = \mathcal{S}^{\lambda/C} \left(\frac{y_{k-1}}{C} \right)$$

Pour une régularisation de type $d(\mathbf{m}) = \|m - 1\|_p^p$ il suffit de modifier le problème inverse initial par un changement de variable $\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m} - 1$. En notant $b = x_1 - x_0$, on a cette fois la formulation suivante

$$\Phi(\tilde{\mathbf{m}}) = \|A\tilde{\mathbf{m}} - b\|_2^2 + \lambda \|\tilde{\mathbf{m}}\|_p^p \quad (9)$$

et les algorithmes précédents s'appliquent alors de la même façon.

Remarque 1 Les algorithmes décrits ici font partie des méthodes de premier ordre et convergent en $O(1/k)$. Les auteurs de [7] proposent une méthode du second ordre qui converge en $O(1/k^2)$ sans ajouter de complexité dans les itérations et peuvent être appliqués dans les cas proposés ci-dessus.

3.3 Choix du terme de régularisation

Pour le terme de régularisation, les choix classiques sont la norme euclidienne ℓ_2 . Dans [1], $d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m}\|_2^2$ est utilisé, alors que dans [2], $d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m} - 1\|_2^2$ est préféré. Ce dernier choix est motivé par la volonté de retenir $\mathbf{m} = 1$ comme référence correspondant au cas où il ne se passe rien (la source et la cible sont égales).

Pour des applications plus spécifiques, une version pondérée des normes peut être utilisée (par exemple une pondération des fréquences) :

$$\|\mathbf{m}\|_{w,p}^p = \sum_{k,l} w_k |\mathbf{m}(k,l)|_p^p.$$

La transformée de Gabor de signaux réels possède des valeurs complexes dont les phases contiennent une information indispensable (notamment dans un processus

d'analyse/synthèse) et sont en général difficilement utilisables précisément. La phase du masque contient entre autres une information sur les petits décalages temporels pouvant exister entre le signal source et le signal cible, et il est difficile de pouvoir interpréter son rôle précisément. Cela nous amène à penser que le masque de Gabor n'a aucune raison *a priori* d'être proche de 1. Il paraît alors plus naturel de choisir comme référence un masque $|\mathbf{m}| = 1$ plutôt que $\mathbf{m} = 1$, laissant à la phase la possibilité de s'ajuster par rapport au terme d'attache aux données. Cela mène à l'utilisation d'un terme de régularisation de la forme

$$d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m}\| - 1 \|_{w,p}^p.$$

Un tel terme de régularisation est non convexe, l'unicité de la solution n'est plus assurée et les analyses de convergence décrites précédemment ne s'appliquent plus. Nous utiliserons alors la formulation du problème dans le domaine de Gabor (ou approximation diagonale). Pour les applications audio, ce choix présente l'avantage d'éviter les artefacts causés par une mauvaise modélisation de la phase, particulièrement pour de grandes valeurs du paramètre λ , comme cela est illustré dans la partie 4.

Nous avons considéré ici (de façon non exhaustive) un certain nombre de possibilités pour le terme de régularisation qui pourront être choisis en fonction des différentes applications. Approfondir nos connaissances sur le calcul du masque a aussi une utilité sur le plan pratique en nous permettant de justifier l'utilisation de l'approximation diagonale et d'en connaître plus précisément les limites. L'élargissement de ces méthodes algorithmiques pour d'autres choix de régularisation fait partie des perspectives des travaux présentés ici.

4 Applications musicales du masque de Gabor

L'information contenue dans les masques de Gabor caractérisant point par point les différences entre les représentations temps-fréquence des signaux, les représentations temps-fréquence des signaux considérés doivent être bien superposées pour pouvoir faire apparaître dans le masque une information pertinente. Par exemple, un décalage temporel entre les signaux nuirait à une bonne capture des nuances différenciant les attaques de deux signaux. Nous proposons d'illustrer notre propos sur l'exemple de deux notes isolées de clarinette et de saxophone (obtenues par synthèse). Leurs images temps-fréquence sont représentées sur la figure 1 (Sur les figures présentées ici, les amplitudes sont représentées sur une échelle logarithmique). Les signaux ont été recalés en temps pour que leurs attaques se superposent au mieux.

4.1 Catégorisation et parcimonie

La classification des signaux telle qu'elle a été effectuée dans [2] montre que l'information contenue dans le masque est suffisamment pertinente pour permettre la catégorisation de quatre classes d'instruments de musique jouant la même note. Cette classification est obtenue par la construction d'une mesure de dissimilarité

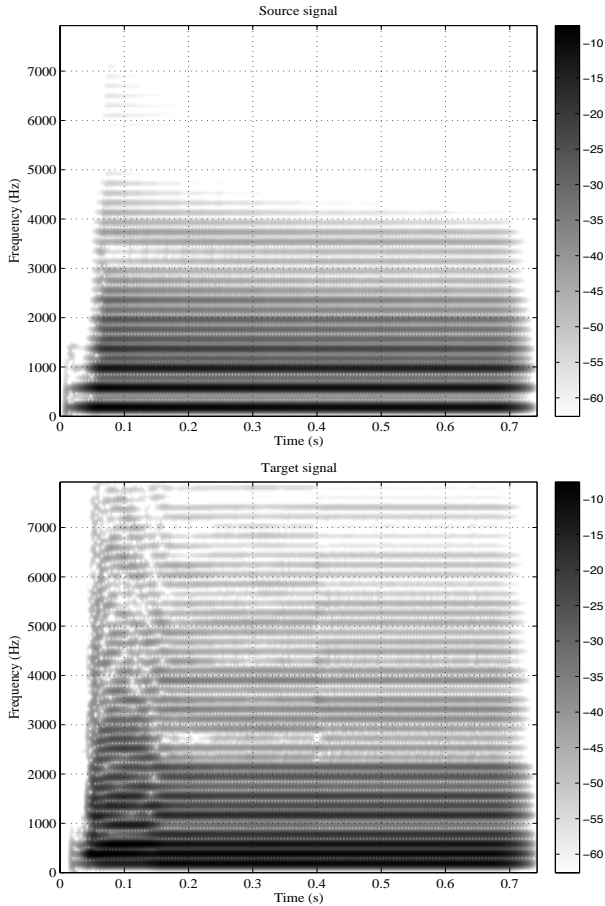


FIG. 1: Signal source : clarinette (en haut) and signal cible : saxophone (en bas)

tentant de représenter l'information contenue dans le masque. Les mesures de dissimilarités qui permettent une bonne classification sont par exemple $\|\mathbf{m} - 1\|_p$ pour $p = 1, 2$ et $\|\mathbf{m}\|_1 - \log\|\mathbf{m}\|_1 - 1$. Elles mesurent l'information contenue dans le masque autour de 1.

Il est maintenant possible de chercher directement à modéliser le masque de façon à répartir l'information autour de $\mathbf{m} = 1$ ou $|\mathbf{m}| = 1$ sur le minimum de coefficients possibles, ce qui peut être réalisé en considérant un terme de régularisation $\|\mathbf{m} - 1\|_1$ ou $\||\mathbf{m}| - 1\|_1$, qui correspondent à la norme utilisée de façon classique pour obtenir une représentation parcimonieuse de la solution d'un problème inverse. Ce terme de régularisation joue un rôle de pénalisation dans la modélisation du problème puisqu'il vient sculpter les caractéristiques temps-fréquence du masque obtenu, comme on le voit sur la figure 2, où sont représentés les masques obtenus pour différents choix de régularisation. Tout d'abord, on voit clairement une diminution des artefacts dus à la phase lorsque la référence choisie est $|\mathbf{m}| = 1$. Qualitativement, on constate également que la répartition des coefficients du masque n'est pas la même dans les cas ℓ_2 et ℓ_1 . La concentration de l'information est plus parcimonieuse pour des choix de pénalisation de type ℓ_1 , comme on le voit sur les composantes harmoniques qui sont alors beaucoup plus fines en fréquence. Ce genre de régularisation doit pouvoir améliorer la catégorisation, et remplacer l'étape de débruitage des transformées de Gabor utilisée dans [2], qui avait pour but, par une étape de pré-traitement, de simplifier les représentations

temps-fréquence pour faciliter la catégorisation.

Avec les instruments de musique, les différences entre les signaux sont généralement obtenues à partir de descripteurs temporels et fréquentiels (temps d'attaque, centre de gravité spectral, flux spectral,...). Ces descripteurs de signaux sont implicitement pris en compte dans les représentations temps-fréquence des signaux et leurs différences apparaissent dans le masque de Gabor. Sur la figure 2, on observe que le choix d'un paramètre λ élevé conduit à un masque très épuré, dans lequel sont conservées des caractéristiques spectrales (positionnement des harmoniques) et temporelles (comportement des temps d'attaque, évolution des harmoniques). Le choix d'un paramètre λ plus faible aurait conduit à un masque plus riche en fréquence.

4.2 Morphing de signaux

L'approche de morphing de signaux proposée ici est d'associer de différentes valeurs d'un paramètre la famille de masques de Gabor entre le masque de Gabor qui relie le signal source au signal cible et le masque unité. Etant donné un terme de régularisation $d(\mathbf{m})$, le masque de Gabor estimé dépend alors du paramètre λ qui contrôle l'influence de ce terme, qui peut alors être vu comme un terme de régularisation. Pour de petites valeurs de λ , le signal $\mathbb{M}_{\mathbf{m}}x_0$ sera proche du signal cible x_1 . Pour de plus grandes valeurs de λ , \mathbf{m} sera plus proche de la référence $d(\mathbf{m}) = 0$ et conduira à la construction d'un signal $\mathbb{M}_{\mathbf{m}}x_0$ proche du signal source x_0 . De tels morphings ont été effectués avec les signaux source et cible présentés sur la figure 1 et les exemples sonores sont en ligne à l'adresse [8], pour les choix $d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m} - 1\|_2^2$ et $d(\mathbf{m}) = \||\mathbf{m}| - 1\|_2^2$ avec leur approximation diagonale. On observe sur ces exemples les représentations temps-fréquence des signaux synthétisés se transformer progressivement pour passer du signal source au signal cible. En outre, on remarque que la qualité sonore des sons intermédiaires obtenus est meilleure dans le cas où l'on pose un terme de régularisation sur le module du masque, ce qui est dû à une diminution des artefacts causés par une mauvaise modélisation de la phase du masque.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle méthode pour l'estimation de masque de Gabor entre un signal source et un signal cible. Cette méthode est basée sur la formulation d'un problème inverse, que l'on résout à l'aide d'algorithmes itératifs. Nous avons pour objectif d'élargir ces méthodes pour des termes de régularisation non convexes. Du point de vue des applications aux signaux musicaux, l'élargissement des possibilités de choix pour le terme de régularisation du problème inverse permet de sculpter la forme du masque en forçant ses coefficients à respecter un certain critère choisi en fonction de l'utilisation que l'on s'est fixée.

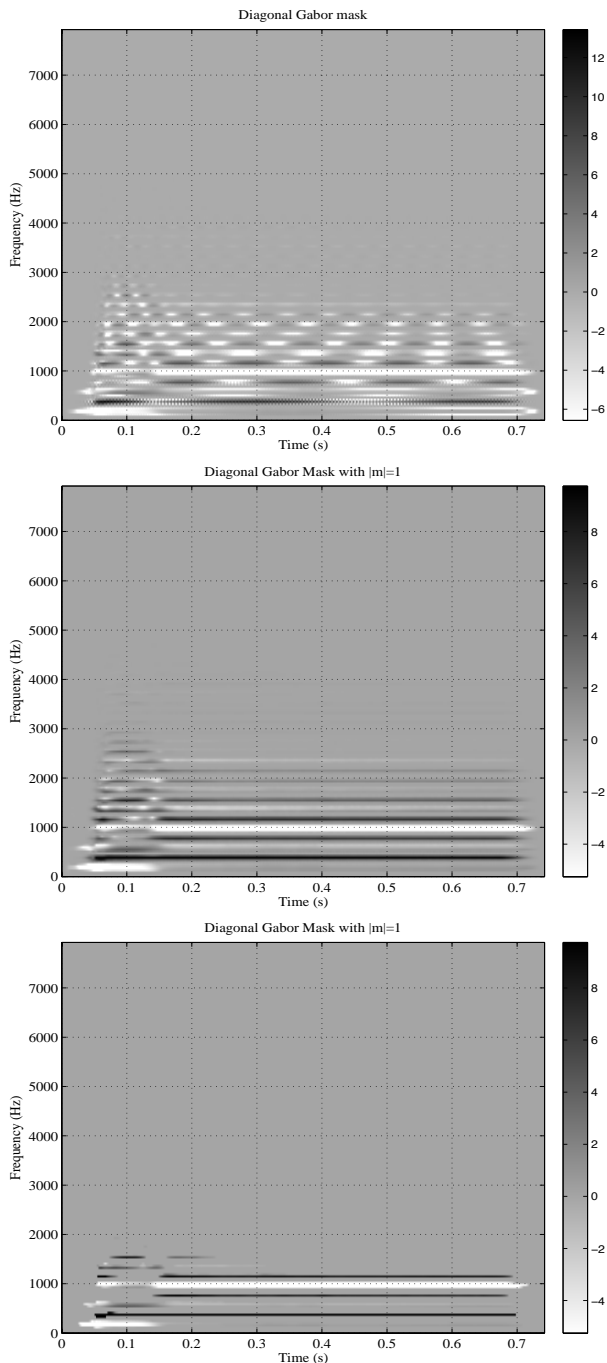


FIG. 2: Approximation diagonale du masque de Gabor obtenu entre une clarinette et un saxophone, pour $\lambda = 1e - 4$, pour $d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m} - 1\|_2^2$ (en haut), $d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m}| - 1\|_2^2$ (au milieu) et $d(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m} - 1\|_1$ (en bas)

Remerciements

Nous remercions Philippe Depalle, Laurent Daudet, Olivier Derrien pour les discussions et leurs conseils, ainsi que Philippe Guillemain pour avoir généré les sons d'instruments de musique utilisés lors de nos expériences.

Références

- [1] P. Depalle, R. Kronland-Martinet and B. Torr sani, "Time-Frequency multipliers for

sound synthesis " in *Proc. Wavelet*, San Diego, September 4-8. 2006, pp. 221-224. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00287219.v1/>

- [2] A. Olivero, L. Daudet, R. Kronland-Martinet and B. Torr sani, "Analyse et catégorisation des sons par multiplicateurs temps-fréquence " in *Proc. Grets*, Dijon, September 4-8. 2009. <http://hdl.handle.net/2042/29160>
- [3] H. G. Feichtinger. et T. Strohmer, *Gabor Analysis and Algorithms : Theory and Applications*, ISBN : 0817639594, *Birkhauser Boston*, 1997.
- [4] K.H. Gr chenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston (2001).
- [5] M. D rfler and B. Torr sani, "On the time-frequency representation of operators and generalized Gabor multiplier approximations", *Journal of Fourier Analysis and Applications*, to appear (2010). doi : 10.1007/s00041-009-9085-x
- [6] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol, "An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint," *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 57, no. 11, pp. 1413 - 1457, August 2004.
- [7] A. Beck and M. Teboulle, "A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems", *SIAM Journal on Imaging Sciences* vol. 2, no. 1, pp. 183 - 202, 2009.
- [8] <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~olivero/morphsounds.html>